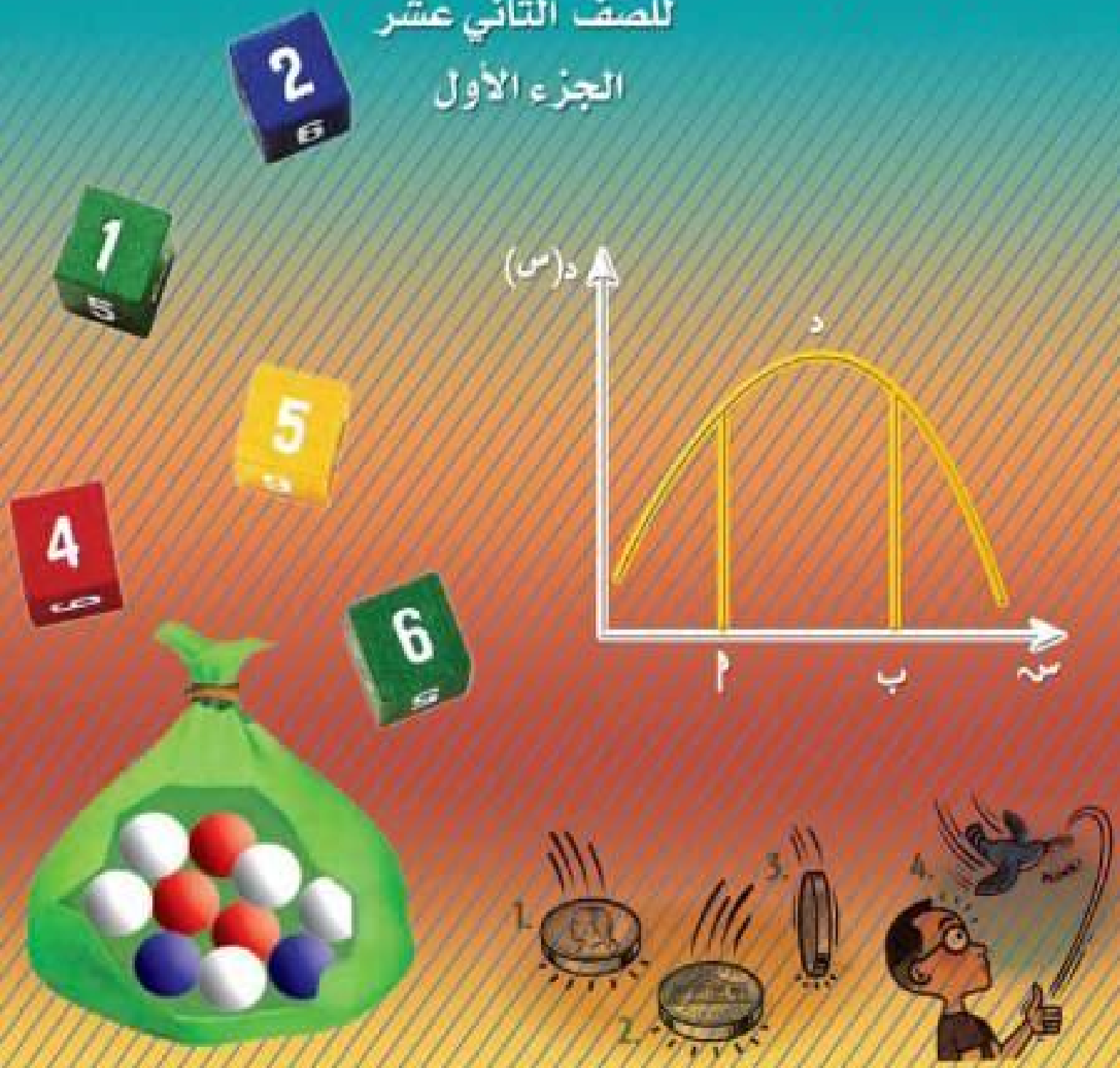
وزارة التربية

الرياضيات والإحصاء

للصف الثاني عشر

الجزء الأول



للمرحلة الثانوية

الطبعة الأولى

وزارة التربية

الرياضيات والإحصاء

للصف الثاني عشر
الجزء الأول

تأليف

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيساً)

أ. د. ممدوح محمد سليمان — د. شفيقة عبدالحميد العوضي

أ. د. عماد الدين علي أحمد — أ. محمود عبدالغني محمد

أ. إلهام عفيفي علي — أ. نجوى محمد وسيم عبدالرازق

أ. وداد محمد سعود بوعباس

الطبعة الثانية

١٤٣٢هـ

٢٠١١ - ٢٠١٢م

الطبعة الأولى : ٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م
٢٠٠٩ - ٢٠١٠م

الطبعة الثانية : ٢٠١١ - ٢٠١٢م

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

الموضوع المحتوى

الصفحة

الموضوع المحتوى

الصفحة

المقدمة

إن دور الرياضيات بفروعها المختلفة ضروري ومهم ومحوري في بناء العقلية العلمية الواعية والمرتبة القادرة على التفكير السليم بمستوياته المتعددة ابتداءً بالتفكير المبني على الملاحظة وإدراك العلاقات، ومروراً بالتفكير الناقد ووصولاً إلى التفكير الابتكاري والإبداعي، والتمكن من حل المشكلات في الحياة المعاصرة.

وإلى جانب دور الرياضيات في تقديم الحلول للكثير من المشاكل والمعضلات التي تواجه العلماء والباحثين في شتى علوم الطبيعة، فقد اهتمت الدول المتقدمة بالرياضيات لعظيم دورها في دفع عجلة النهضة والرقي الحضاري.

هذا وقد أدرك المسلمون الأوائل أهمية الرياضيات ودورها، فاهتموا بدراستها، ونبغ منهم علماء أفذاذ قدموا للبشرية الكثير، وتتلمذ على أيديهم علماء الغرب وأفادوا بعلمهم أوروبا والعالم بأسره.

ويعد علم الإحصاء علماً هاماً من بين علوم الرياضيات التي تخدم باقي العلوم، وتفيد بتطبيقاتها شتى مجالات الحياة.

وقد ازدادت أهمية هذا العلم خاصة في السنوات الأخيرة، وتجاوز أن يكون مجرد فرع من فروع الرياضيات إلى أن أصبح علماً قائماً بذاته، له أساليبه وأسسه وقواعده، وكذا فروعه المختلفة حتى دخلت أفكاره في أغلب العلوم الأخرى، مثل علم الفيزياء والكيمياء، وفروع الهندسة المختلفة، والبيولوجي والفسيولوجي، وعلم النفس وعلوم الإدارة، والعلوم السياسية والاقتصادية والعسكرية إلى جانب البحوث العلمية والتربوية بأنواعها المختلفة.

وفي وقتنا الحاضر اشتدت الحاجة للإحصاء لبناء العقلية الاحتمالية وإعداد البحوث العلمية، وخدمة علم الإدارة الحديثة وغير ذلك من تطبيقاته، لما تقدمه من قواعد ونظريات وطرق علمية تساعد على تعرف طرق جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها والاستفادة منها في التنبؤ العلمي وبناء الرؤى المستقبلية التي يحتاجها متخذو القرار في وضع الخطط، ورسم الاستراتيجيات على كافة المستويات.

من أجل ذلك كله، وانسجاماً مع توجهات وزارة التربية بدولة الكويت لتطوير التعليم ليلبي

حاجات المجتمع ويتناغم مع مناهج الرياضيات العالمية ويكون قادراً على تهيئة طلابنا لدراسة جامعية تحقق مخرجات أكثر تأهيلاً للتعامل مع المستجدات العلمية والتربوية التي يشهدها العالم اليوم تقدم بهذا المقرر في مادة الرياضيات، والإحصاء للصف الثاني عشر كمقرر من مقررات النظام الموحد في المرحلة الثانوية للعام الدراسي ٢٠٠٨/٢٠٠٩م.

هذا ويأمل القائمون على إعداد هذا المقرر والمشرفون عليه أن يحقق الأهداف المرجوة منه، وأن يخدم العملية التربوية والتعليمية ويساهم في تطويرها.

والله ولي التوفيق،،،

المؤلفون

الفصل الأول

مقدمة في الاحتمال

Introduction To Probability

١ - ١ التجربة العشوائية - فضاء العينة .

١ - ٢ الحدث .

١ - ٣ الاحتمال .

١ - ٤ الأحداث المستقلة .

١ - ٥ تمارين عامة .

١ - ١ التجربة العشوائية - فضاء العينة

Random Experiment - Sample Space

مقدمة:

نتعامل يومياً مع قرارات تتعلق بأمور لها صفة العشوائية:

- فإذا كنت تسير بالسيارة مقترباً من إشارة المرور قد تتساءل هل سيكون لون الإشارة أخضر عندما تصل إلى التقاطع؟
- وإذا كنت تستثمر بعض أموالك في بورصة الكويت في الشهر الحالي قد تتساءل هل ستحقق بعض الربح في نهاية الشهر؟

- وإذا كنت تعتزم الخروج في رحلة بحرية في نهاية الأسبوع الحالي قد تتساءل هل سيكون الجو مناسباً للرحلة؟

كل مثال من الأمثلة الثلاث السابقة يتعلق بتجربة عشوائية.

التجربة العشوائية Random Experiment

التجربة العشوائية هي تجربة لها عدد من النواتج المختلفة الممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقاً من أنّ أياً منها سوف يتحقق عند إجراء هذه التجربة.

- ففي مثال إشارة المرور نعلم مسبقاً أن لون الإشارة سوف يكون أحد الألوان: أخضر أو أصفر أو أحمر ولكن لا يمكن أن نحدد بشكل قاطع مسبقاً ما سوف يكون عليه لون الإشارة عندما تصل إلى التقاطع.

- في مثال الأموال المستثمرة في البورصة نعلم مسبقاً أنه في نهاية الشهر قد تكون حققت: ربحاً أو خسارة أو ليس أياً منهما ولكن لا نستطيع أن نحدد الموقف بشكل قاطع عند إقفال البورصة في آخر يوم من الشهر.

ومن أمثلة التجارب العشوائية:

- رمي قطعة نقود وملاحظة الوجه الظاهر فإن النتيجة تكون أحد العناصر {صورة، كتابة}.
- رمي حجر نَرْدٍ وملاحظة الوجه العلوي فإن نتيجة التجربة هي ظهور أحد أرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

فضاء العينة (ف) Sample Space

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لتلك التجربة ويرمز له بالرمز ف ونرمز لعدد عناصر هذه المجموعة بالرمز ن(ف).

ففي حالة رمي قطعة نقود وملاحظة الوجه الظاهر، إذا رمزنا لظهور الصورة بالرمز ص ، ولظهور الكتابة بالرمز ك فإن ف = {ص ، ك} ويكون ن(ف) = ٢، وفي حالة رمي حجر النرد وملاحظة الوجه العلوي فإن ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ويكون ن(ف) = ٦.

مثال ١

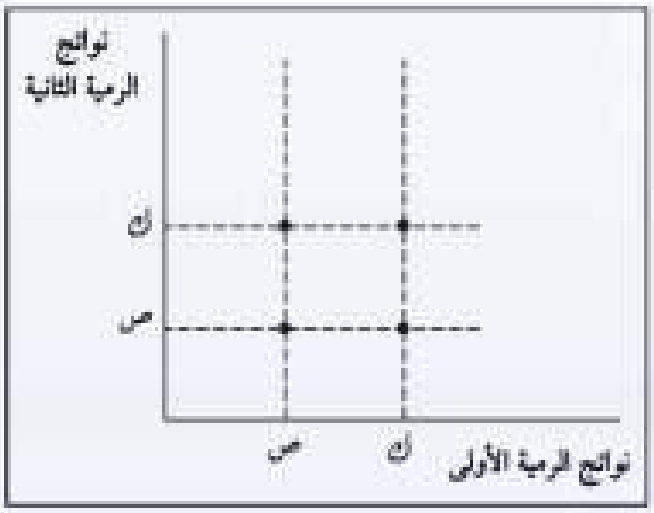
عند رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه الظاهر في كل مرة. أوجد فضاء العينة.

الحل

يمكن الحصول على فضاء العينة بعدة طرق منها:

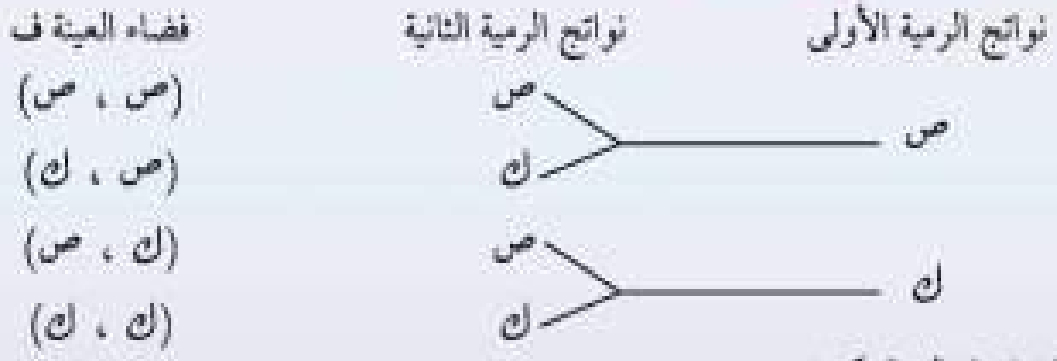
١ التمثيل البياني:

يمكن تمثيل النواتج بنقط في مستوى الإحداثيات حيث يتم تمثيل عناصر الرمية الأولى على المحور الأفقي، وعناصر الرمية الثانية على المحور الرأسي كما هو موضح في الشكل الذي أمامك.



ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

٢ الشجرة البيانية Tree Diagram



فإن فضاء العينة يكون:

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

ملاحظات

- فضاء العينة في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين هو نفسه فضاء العينة عند رمي قطعتي نقود متمايزتين مرة واحدة (أي يمكن التمييز بينهما في اللون أو الحجم أو النوع. . .)
- عدد عناصر فضاء العينة ن(ف) = عدد نواتج الرمية الأولى × عدد نواتج الرمية الثانية.

مثال ٢

صندوق به ثلاث بطاقات متماثلة ، ومرقمة بالأرقام ٣ ، ٥ ، ٩، سحبت بطاقتان عشوائياً الواحدة تلو الأخرى مع الإرجاع (أي إعادة البطاقة الأولى قبل سحب البطاقة الثانية)

١ أوجد عدد عناصر فضاء العينة.

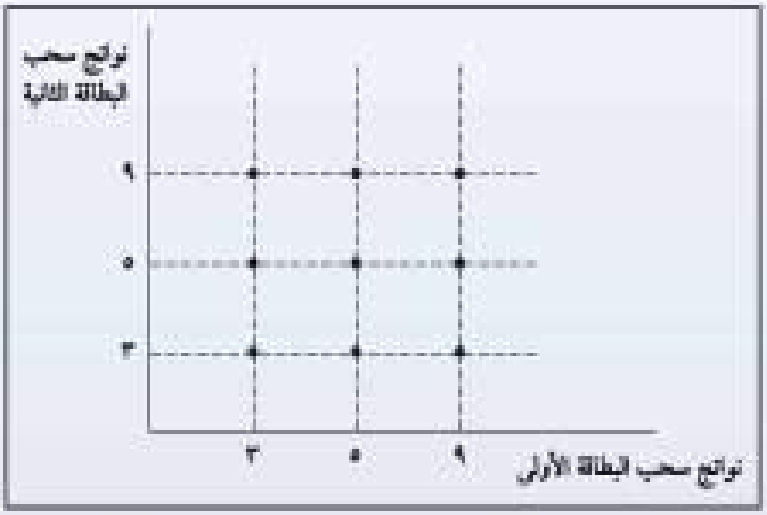
٢ مثّلْ فضاء العينة بيانياً.

الحل

في حالة السحب مع الإرجاع نجد أن كل بطاقة تسحب من الصندوق في المرة الأولى تعاد مرة أخرى إلى الصندوق قبل السحب الثاني مما يجعل عدد البطاقات ثابتاً في كل من السحبتين.

١ عدد عناصر فضاء العينة ف = ٣ × ٣ = $(٣)^{٢}$ = ٩

٢ الشكل التالي يمثل فضاء العينة (ف)



ف = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٩) ، (٩ ، ٣) ، (٩ ، ٥) ، (٩ ، ٩)}

تدريب:

في المثال السابق أوجد عدد عناصر فضاء العينة في حالة سحب بطاقتين الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع.

مثال ٣

في تجربة رمي حجر نرد ثلاث مرات متتالية وملاحظة الأعداد التي تظهر على الوجه العلوي. المطلوب إيجاد عدد عناصر فضاء العينة.

الحل

عدد عناصر فضاء العينة = عدد نواتج الرمية الأولى × عدد نواتج الرمية الثانية × عدد نواتج الرمية الثالثة

ن(ف) = ٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦

ملاحظة

فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد ثلاث مرات متتالية هو نفسه فضاء العينة عند رمي ثلاث أحجار متمايزة مرة واحدة.

سحب عينة عدد عناصرها ر من مجتمع عدد عناصره (ر ≤ ن)

قد يكون عدد عناصر فضاء العينة كبيراً مما يصعب معه كتابة نواتجه، في هذه الحالة نوجد عدد النواتج باستخدام مبدأ العد أو التباديل أو التوافيق.

فمثلاً عند سحب ٣ كرات من صندوق يحوي ١٠ كرات يجب الأخذ في الاعتبار:

١. السحب مع الإرجاع.
٢. السحب بدون الإرجاع.
٣. مراعاة الترتيب أو إهمال الترتيب.

مثال ٤

كيس يحوي ١٠ كرات متماثلة. أوجد عدد عناصر فضاء العينة إذا سحبت منه عشوائياً وبدون إرجاع:

١ ٣ كرات الواحدة تلو الأخرى

٢ ٣ كرات معاً

الحل

عدد عناصر فضاء العينة = ن(ف) = $^{١٠}ل_{٣}$ = ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠

عدد عناصر فضاء العينة = ن(ف) = $\binom{١٠}{٣}$ = $\frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ١٢٠

تمارين ١-١

أولاً - أوجد فضاء العينة في كل من الحالات التالية:

١ عند رمي ثلاث قطع متمايزة من النقود وملاحظة الأوجه الظاهرة.

٢ في رمي حجر نرد ثم قطعة نقود وملاحظة النواتج على الوجهين.

ثانياً - صندوق يحوي ١٢ كرة جميعها متماثلة.

أوجد عدد عناصر فضاء العينة إذا سحبت منه عشوائياً وبدون إرجاع:

١ ٤ كرات معاً.

٢ ٤ كرات الواحدة تلو الأخرى.

١ - ٢ الحدث Event

تعريف:

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف فإذا كان أ حدثاً فإن أ ⊆ ف.

فمثلاً في تجربة رمي حجر نرد

فضاء العينة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

إذا كان الحدث أ «ظهور الرقم ٢» فإن أ = {٢} ،

الحدث ب «ظهور عدد زوجي» فإن ب = {٢ ، ٤ ، ٦} ،

الحدث حـ «ظهور عدد فردي أكبر من ١» فإن حـ = {٣ ، ٥}

لاحظ أن كلاً من أ ، ب ، حـ مجموعة جزئية من ف

وقوع الحدث:

يقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية عنصراً من عناصر المجموعة التي يتألف منها الحدث.

ففي المثال السابق إذا كانت نتيجة رمي حجر النرد هو ظهور العدد ٢ أو ظهور العدد ٤ أو ظهور العدد ٦ فإن الحدث ب = {٢ ، ٤ ، ٦} قد وقع.

أما إذا كانت النتيجة هي ظهور العدد ١ أو ظهور العدد ٣ أو ظهور العدد ٥ فإن الحدث ب = {٢ ، ٤ ، ٦} لم يقع.

لما كان ناتج التجربة لا بد أن يكون عنصراً من عناصر ف لذا فإن ف هي حدث ويسمى بالحدث المؤكد.

ففي تجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة نجد أن ف = {ص ، ك} حدث مؤكد.

وحيث إن ∅ خالية من أي عنصر لذلك فإن أي ناتج للتجربة لا يمكن أن يكون عنصراً من عناصر ∅ وبالتالي فإن ∅ حدث مستحيل (أي لا يمكن وقوعه).

الحدث البسيط Simple Event

الحدث البسيط هو: مجموعة جزئية من فضاء العينة تحوي ناتجاً واحداً من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصراً واحداً من عناصر ف).

ففي المثال السابق عند رمي حجر النرد يكون الحدث أ حدثاً بسيطاً، أما الحدث ب فلا يعتبر حدثاً بسيطاً لاحتوائه على أكثر من ناتج.

وعند رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن ف = {ص ، ك} ويكون كل من الأحداث {ص} ، {ك} حدثاً بسيطاً.

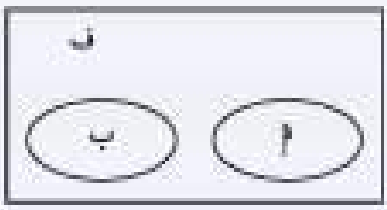
لاحظ أن فضاء العينة هو اتحاد جميع الأحداث البسيطة.

الحدث المركب Compound Event

الحدث المركب: هو الحدث الذي يحوي أكثر من ناتج من نواتج التجربة العشوائية.

ففي المثال السابق في تجربة رمي حجر نرد نجد أن الحدث ب «ظهور عدد زوجي» ب = {٢ ، ٤ ، ٦} هو حدثٌ مركبٌ.

الحدثان المتنافيان Mutually Exclusive Events



يقال إن أ ، ب حدثان متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ∅ والعكس صحيح (أي وقوع أحدهما أثناء التجربة ينفي وقوع الآخر في نفس الوقت).

فمثلاً عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن حدث ظهور الصورة وحدث ظهور الكتابة حدثان متنافيان.

وكذلك في المثال السابق تجربة رمي حجر نرد

فإن الحدث ب «ظهور عدد زوجي» ب = {٢ ، ٤ ، ٦}

، الحدث حـ «ظهور عدد فردي أكبر من ١» حـ = {٣ ، ٥}

ولذا فإن ب ، حـ حدثان متنافيان لأنهما لا يقعان معاً

لاحظ أن ب ∩ حـ = ∅

ملاحظة

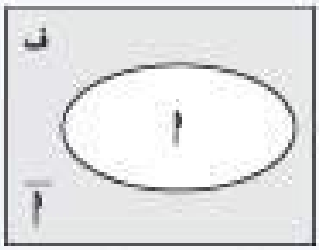
يقال لعدة أحداث أ ، ب ، حـ أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى والعكس صحيح

أ ∩ ب = ∅ ، أ ∩ حـ = ∅ ، ب ∩ حـ = ∅

فعلى سبيل المثال في تجربة رمي حجر نرد نجد أن الأحداث

أ = {١} ، ب = {٢ ، ٣} ، حـ = {٥ ، ٦} متنافية

الحدث المتمم $\overline{أ}$ The complement Event



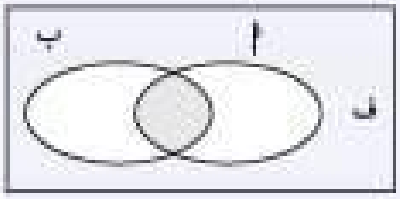
الحدث $\overline{أ}$ يسمى الحدث المتمم للحدث أ إذا كان $\overline{أ}$ يحوي جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث أ.

لاحظ أن: ١ أ ∪ $\overline{أ}$ = ف لذا يقال إن أ ، $\overline{أ}$ حدثان متتامان

٢ أ ∩ $\overline{أ}$ = ∅ أي أن أ ، $\overline{أ}$ حدثان متنافيان

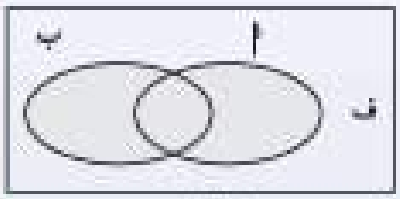
العمليات على الأحداث Operations on Events

ليكن أ ، ب حدثين من ف فإن:



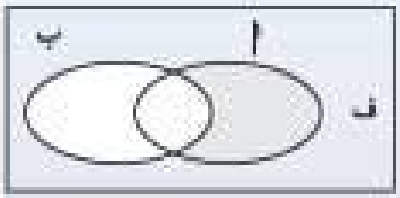
أ ∩ ب

١ وقوع الحدثين أ و ب معاً هو الحدث «أ ∩ ب» ويحوي كل عناصر فضاء العينة التي تنتمي إلى كل من أ و ب.



أ ∪ ب

٢ وقوع الحدث أ أو الحدث ب أو وقوعهما معاً هو الحدث «أ ∪ ب» ويحوي كل عناصر فضاء العينة التي تنتمي إلى أ أو ب أو إليهما معاً.



أ ∩ $\overline{ب}$

٣ وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب هو الحدث «أ ∩ $\overline{ب}$» ويحوي كل عناصر فضاء العينة التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب

لاحظ أ ∩ $\overline{ب}$ = أ − ب .

مثال ١

في تجربة رمي حجر نرد مرتين إذا كان :

الحدث أ «العدد في الرمية الأولى ضعف العدد في الرمية الثانية».

الحدث ب «مجموع العددين في الرميتين هو ٨».

الحدث حـ «العددين متساويين».

١ أوجد كلاً من الأحداث أ ، ب ، حـ

٢ هل كلاً من أ ، ب ، حـ احداثاً متنافية.

٣ أوجد الحدث ب ∩ $\overline{حـ}$

الحل

١ أ = {(١،٢) ، (٢،٤) ، (٣،٦)}

ب = {(٢،٦) ، (٣،٥) ، (٤،٤) ، (٥،٣) ، (٦،٢)}

حـ = {(١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦)}

٢ أ ∩ ب = ϕ ، أ ∩ حـ = ϕ ، ب ∩ حـ = {(٤،٤)}

أي أن أ ، ب ، حـ أحداث ليست متنافية

٣ ب ∩ $\overline{حـ}$ = {(٢،٦) ، (٣،٥) ، (٤،٤) ، (٥،٣) ، (٦،٢)}

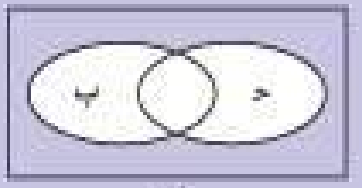
تذكر أن:

$\overline{(أ ∩ ب)} = \overline{أ} ∪ \overline{ب}$

$\overline{(أ ∪ ب)} = \overline{أ} ∩ \overline{ب}$

تدريب :

أكمل الجدول التالي :

التعبير اللفظي للحدث	التعبير الرمزي للحدث	التعبير عن الحدث بالمنطقة المظللة في شكل ڤن
عدم وقوع الحدث حـ وعدم وقوع الحدث ب		

تمارين ١-٢

١ كيس به ١٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١٢ سحبت بطاقة عشوائياً ولوحظ العدد المسجل على هذه البطاقة وكان:

- الحدث أ «العدد زوجي».
- الحدث ب «العدد يقبل القسمة على ٣».

أجب عما يلي:

أ اكتب الحدثين أ ، ب

ب هل أ ، ب حدثان متنافيان؟

جـ اكتب الحدث جـ «العدد الزوجي ولا يقبل القسمة على ٣» بدلالة أ ، ب

٢ رميت قطعة نقود مرتين اكتب الأحداث التالية مع وصفها (حدث مؤكد - حدث مستحيل - حدث بسيط - حدث مركب):

- الحدث أ «ظهور صورة واحدة على الأقل».
- الحدث ب «ظهور صورة واحدة على الأكثر».
- الحدث جـ «ظهور كتابة واحدة».
- الحدث ء «ظهور صورتين».

٣ في التمرين السابق اكتب الحدث هـ «أ ∩ ء»

٤ إذا أقيمت مباراة في كرة القدم بين الفريقين س ، ص ولوحظت نتيجة المباراة

أ أوجد فضاء العينة.

ب اكتب الأحداث التالية:

- الحدث أ «فوز الفريق س».
- الحدث ب «تعادل الفريقين».
- الحدث جـ «فوز أو هزيمة الفريق س».

٥ إذا رميت قطعة نقود ثم حجر نرد. ولوحظ الوجه العلوي لكل منهما:

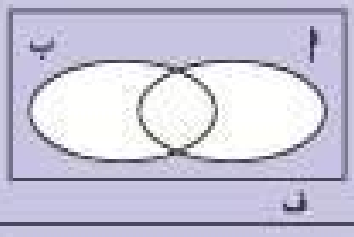
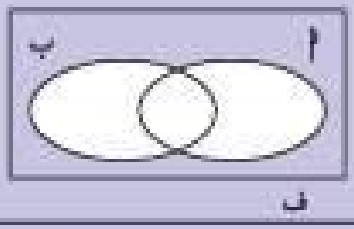
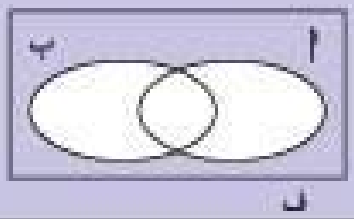
أ أوجد فضاء العينة.

ب اكتب الأحداث التالية:

- الحدث أ «ظهور كتابة و عدد زوجي».
- الحدث ب «ظهور صورة وعدد فردي».

جـ هل الحدثان أ و ب متنافيان؟ اذكر السبب.

٦ أكمل الجدول التالي:

م	التعبير اللفظي للحدث	التعبير الرمزي للحدث	التعبير عن الحدث بالمنطقة المظللة في شكل ڤن
أ	حدث وقوع ب وعدم وقوع أ		
ب	حدث عدم وقوع أ و ب معاً		
حـ	حدث عدم وقوع أيٍّ من أ و ب		

١ - ٣ الاحتمال Probability

يعين علم الاحتمال لكل حدث من أحداث التجربة العشوائية عدداً حقيقياً يسمى احتمال الحدث، وهذا العدد الحقيقي يقيس احتمال وقوع الحدث.

وسوف نرمز لاحتمال الحدث أ بالرمز ل(أ).

مسلمات الاحتمال The Axioms Of Probability

لاحظ أن ل دالة حقيقية مجالها مجموعة أحداث التجربة العشوائية ويجب أن تحقق المسلمات التالية:

١ لأي حدث أ يكون $٠ \leq$ ل(أ) ≤ ١

٢ ل(ف) = ١

٣ إذا كانت أ ، ب ، حـ ... أحداثاً متنافية مثنى مثنى فإن:

- ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)
- ل(أ ∪ ب ∪ حـ) = ل(أ) + ل(ب) + ل(حـ)
- ل(أ ∪ ب ∪ ...) = ل(أ) + ل(ب) + ...

لاحظ أن المسلمة (٣) تسمى بقاعدة الجمع لاحتمالات الأحداث المتنافية وتعمم لأي عدد منته من الأحداث المتنافية.

مثال ١

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين في فضاء العينة ف لتجربة عشوائية بحيث:

ل(أ) = $\frac{١}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٤}$

أوجد ل(أ ∪ ب)

الحل

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) = $\frac{١}{٨} + \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٨}$

قاعدة

إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان:

1. عدد عناصر ف هو ن
2. جميع نواتج التجربة العشوائية لها نفس فرصة الظهور (متساوية في احتمال الوقوع).
3. عدد عناصر الحدث أ هو م (أ ⊆ ف)

فإن احتمال الحدث أ = ل(أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$ = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

مثال ٢

في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرة واحدة أوجد احتمال الأحداث التالية:

1. الحدث أ «ظهور الصورة».
2. الحدث ب «ظهور الكتابة».

الحل

ف = {ص ، ك} ، ن(ف) = ٢

أ = {ص} ، ن(أ) = ١

ب = {ك} ، ن(ب) = ١

لاحظ أن الحدثين أ ، ب متنافيان ،

بما أن قطعة النقود منتظمة فإن ل(أ) = ل(ب)

$$\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}} = \frac{١}{٢}$$

مثال ٣

صندوق به ٩ كرات متماثلة تماماً مرقمة من ١ إلى ٩ سحبت كرة عشوائياً من الصندوق أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

1. أ «رقم الكرة المسحوبة عدد أصغر من ٤».
2. ب «رقم الكرة المسحوبة عدد فردي».
3. حـ «رقم الكرة المسحوبة عدد فردي يقبل القسمة على ٣».

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩} ، ن(ف) = ٩

أ = {١ ، ٢ ، ٣} ، ن(أ) = ٣

ب = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} ، ن(ب) = ٥

حـ = {٣ ، ٩} ، ن(حـ) = ٢

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$$ل(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٥}{٩}$$

$$ل(حـ) = \frac{ن(حـ)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٩}$$

ملاحظة

عندما نقول إننا رمينا عشوائياً قطعة منتظمة من النقود أو أننا سحبنا عشوائياً كرة من مجموعة كرات محكمة الخلط فإننا نعني أن الاحتمال منتظم وبالتالي تتساوى احتمالات جميع الأحداث البسيطة أي كل عنصر من ف له نفس فرصة الظهور.

مثال ٤

في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين، أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

١ أ «ظهور صورة في الرمية الأولى».

٢ ب «ظهور كتابة في الرمية الأولى».

٣ حـ «ظهور صورة واحدة على الأقل».

الحل

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ، ن(ف) = ٤

أ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)} ⇐ ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

ب = {(ك ، ص) ، (ك ، ك)} ⇐ ل(ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

حـ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص)} ⇐ ل(حـ) = $\frac{ن(حـ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٣}{٤}$

مثال ٥

صندوق يحوي ١٥ كرة متماثلة منها ٥ كرات حمراء و١٠ كرات سوداء سحبت كرتان عشوائياً بدون إرجاع احسب احتمال كلاً من الأحداث التالية:

١ أ «كرة حمراء والأخرى سوداء».

٢ ب «الكرتان لونهما أسود».

الحل

لاحظ أن عدد عناصر فضاء العينة = ن(ف)

= عدد طرق سحب كرتين من ١٥ كرة

ن(ف) = $\binom{١٥}{٢}$ = $\frac{١٥ \times ١٤}{٢ \times ١}$ = ١٠٥

١ ن(أ) = عدد طرق سحب كرة حمراء وكرة سوداء

= $\binom{٥}{١} \times \binom{١٠}{١}$ = ٥ × ١٠ = ٥٠

ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٥٠}{١٠٥}$ = $\frac{١٠}{٢١}$

٢ ن(ب) = عدد طرق سحب كرتين سوداوين من بين ١٠ كرات سوداء

= $\binom{٥}{٠} \times \binom{١٠}{٢}$ = ١ × $\frac{١٠ \times ٩}{٢}$ = ٤٥

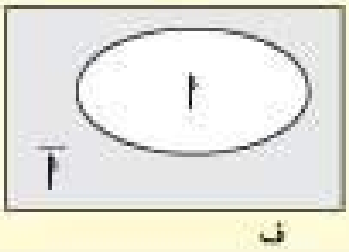
ل(ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)}$ = $\frac{٤٥}{١٠٥}$ = $\frac{٣}{٧}$

بعض نظريات الاحتمال

نظرية (١)

ل(∅) = صفر حيث ∅ هو الحدث المستحيل

نظرية (٢)



ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

حيث $\overline{أ}$ هو الحدث المتمم للحدث أ بالنسبة إلى ف

مثال ٦

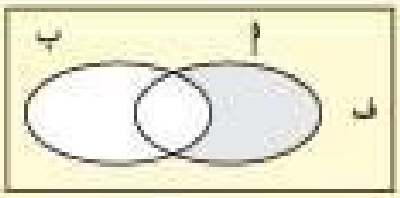
إذا كان احتمال حصول طالب على تقدير ممتاز يساوى ٠,٨ فما احتمال عدم حصوله على تقدير ممتاز؟

الحل

بفرض أن أ هو حدث حصول الطالب على تقدير ممتاز، فيكون الحدث $\overline{أ}$ هو عدم حصول الطالب على تقدير ممتاز

ومن نظرية (٢) يكون ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢ .

نظرية (٣)

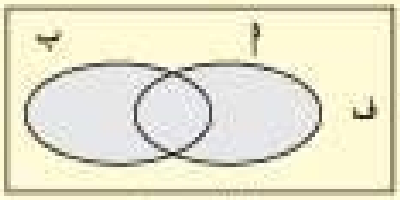


ل(أ ∩ $\overline{ب}$)

إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء العينة ف فإن:

ل(أ ∩ $\overline{ب}$) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

نظرية (٤)



ل(أ ∩ ب)

إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة ف فإن:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

مثال ٧

إذا كان احتمال حضور المدير العام الاحتفال بيوم المعلم بأحد المدارس هو ٠,٩٥ ، واحتمال حضور مدير الشئون التعليمية هو ٠,٩ واحتمال حضور مدير الشئون التعليمية مع المدير العام في ذلك اليوم هو ٠,٨٥٥ ،

أوجد: ١ احتمال حضور المدير العام فقط

٢ احتمال حضور أحدهما على الأقل

٣ احتمال عدم حضورهما معاً

الحل

بفرض أن الحدث أ هو حضور المدير العام والحدث ب هو حضور مدير الشئون التعليمية فإنّ:

١ حضور المدير العام فقط يعني أن المدير العام حضر ولكن مدير الشئون التعليمية لم يحضر أي أن الحدث أ وقع والحدث ب لم يقع.

ونعبر عن حدث حضور المدير العام فقط بالصورة $أ \cap \overline{ب}$

إذن $ل(أ \cap \overline{ب}) = ل(أ) - ل(أ \cap ب)$

$= ٠,٩٥ - ٠,٨٥٥ = ٠,٠٩٥$

٢ حضور أحدهما على الأقل يعني حضور المدير العام أو مدير الشئون التعليمية أو حضور الاثنين معاً ونعبر عنه بالصورة $(أ \cup ب)$

إذن $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= ٠,٩٥ + ٠,٩ - ٠,٨٥٥ = ٠,٩٩٥$

٣ عدم حضورهما معاً نعبر عنه بالصورة $(\overline{أ \cap ب})$

$ل(\overline{أ \cap ب}) = ١ - ل(أ \cap ب) = ١ - ٠,٨٥٥ = ٠,١٤٥$

تمارين ١-٣

١ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين،

ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∩ $\overline{ب}$) = ٠,١٢٥ فأوجد ل(أ) ، ل(ب)

٢ طالبان يتقدمان للمسابقة النهائية لأولمبياد الرياضيات فإذا كان احتمال نجاح الأول ٠,٨٥ واحتمال نجاح الثاني ٠,٧٥ ، واحتمال نجاحهما معاً ٠,٦٤ .

أوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

٣ إذا كان أ ، ب حدثين بحيث ل(أ) = ٠,٥ ، ل($\overline{ب}$) = ٠,٤ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ .

أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

١ وقوع أ ووقوع ب ٢ وقوع أ وعدم وقوع ب

٣ وقوع ب وعدم وقوع أ ٤ وقوع أ فقط أو ب فقط

٤ إذا كان أ ، ب حدثين بحيث ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل(ب ∩ $\overline{أ}$) = ٠,١

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

١ (أ ∩ ب) ٢ (أ ∪ ب)

٣ ($\overline{أ}$ ∪ $\overline{ب}$)

٥ أوجد احتمال وقوع الأحداث التالية:

١ أ «ظهور كتابتين متتاليتين عند رمي قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات».

٢ ب «ظهور العدد ٦ عند رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة».

٣ حـ «مجموع العددين على الوجهين العلويين ١٠ عند رمي حجر نرد منتظم مرتين».

٦ في أحد بيوت الشباب ٩ أشخاص من البحرين و٨ أشخاص من السعودية و٧ أشخاص من عمان، اختير من بينهم أحد الأشخاص عشوائياً.

احسب احتمال أن يكون من السعودية أو من عمان.

٧ حقيبة تحوي ١٠ كتب أدبية و٥ كتب علمية وسحبت ٣ كتب عشوائياً بدون إرجاع.

احسب احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

١ أ «الكتب الثلاثة أدبية».

٢ ب «كتاب واحد على الأكثر علمي».

١ - ٤ الأحداث المستقلة Independent Events

إذا رميت قطعة نقود منتظمة وظهرت صورة فهل يؤثر ذلك في احتمال ظهور العدد ٤ عند رمي حجر نرد منتظم؟

وإذا صَوَّبَ أحمد نحو الهدف فهل يؤثر ذلك في احتمال إصابة نفس الهدف إذا صوب محمد نحوه.

وإذا تقدم طالبان لامتحان القبول في الجامعة فهل يتأثر احتمال نجاح الأول باحتمال نجاح أو عدم نجاح الثاني.

في كثير من الحالات لا يتغير احتمال وقوع الحدث أ بوقوع أو عدم وقوع الحدث ب.

فمثلاً عند رمي قطعة نقود مرتين فإن الحدثين:

نتيجة الرمية الأولى صورة، نتيجة الرمية الثانية صورة لا يتأثر وقوع أحدهما بالآخر وكذلك عند رمي قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة فإن الحدثين:

الوجه الظاهر لقطعة النقود كتابة، الوجه العلوي لحجر النرد الرقم ٣

لا يتأثر وقوع أحدهما بالآخر

أي أن الحدثين أ ، ب مستقلان إذا كان احتمال وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يتأثر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

قاعدة الضرب الأولى للاحتمال First Multiplication Rule Of Probability

إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين فإن: ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) والعكس صحيح

في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة

ف = {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)}

فإذا كان الحدث أ «ظهور صورة في الرمية الأولى»

أ = {(ص،ص) ، (ص،ك)} ⇐ ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

والحدث ب «ظهور صورة في الرمية الثانية»

ب = {(ص،ص) ، (ك،ص)} ⇐ ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى وظهور صورة في الرمية الثانية»

يعبر عنه بالصورة أ ∩ ب = {(ص،ص)} ⇐ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$

مما سبق نجد أن ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

⇐ أ ، ب حدثان مستقلان

وإذا كان الحدث حـ «ظهور كتابة في الرمية الثانية»

فإن حـ = {(ص،ك) ، (ك،ك)} ⇐ ل(حـ) = $\frac{١}{٢}$

ويكون الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى وظهور كتابة في الرمية الثانية»

معبراً عنه بالصورة أ ∩ حـ = {(ص،ك)} ⇐ ل(أ ∩ حـ) = $\frac{١}{٤}$

ومما سبق نجد أن ل(أ ∩ حـ) = ل(أ) × ل(حـ)

⇐ أ ، حـ حدثان مستقلان

مثال ١

انطلقت سيارتان من مركزي إطفاء، وكان احتمال وصول السيارة الأولى إلى مكان الحريق خلال خمس دقائق يساوي ٠,٩٥ واحتمال وصول الثانية إلى المكان خلال المدة نفسها يساوي ٠,٩ أوجد احتمال وصول السيارتين إلى مكان الحريق خلال خمس دقائق.

الحل

بفرض أن الحدث أ يمثل وصول السيارة الأولى خلال خمس دقائق،

والحدث ب يمثل وصول السيارة الثانية خلال خمس دقائق

وبما أن وصول كل سيارة من السيارتين مستقل عن وصول السيارة الأخرى لذا فإن

احتمال وصول السيارتين إلى مكان الحريق خلال خمس دقائق يعبر عنه بالصورة ل(أ ∩ ب)

إذن ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

= ٠,٩٥ × ٠,٩ = ٠,٨٥٥

مثال ٢

إذا رميت قطعة نقود يليها حجر نرد وكان الحدث أ «ظهور صورة في الرمية الأولى»، وكان الحدث ب «ظهور العدد ٣ في الرمية الثانية». أثبت أن أ ، ب حدثان مستقلان

الحل

ف = {(ص،١) ، (ص،٢) ، (ص،٣) ، (ص،٤) ، (ص،٥) ، (ص،٦) ، (ك،١) ، (ك،٢) ، ..... ، (ك،٦)}

⇐ ن(ف) = ١٢

أ = {(ص،١) ، (ص،٢) ، (ص،٣) ، (ص،٤) ، (ص،٥) ، (ص،٦)}

⇐ ل(أ) = $\frac{١}{٢}$

ب = {(ص،٣) ، (ك،٣)} ⇐ ل(ب) = $\frac{١}{٦}$

أ ∩ ب = {(ص،٣)} ⇐ ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٢}$

إذن ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) ⇐ أ ، ب حدثان مستقلان

مثال ٣

كيس يحوي ٣ كرات حمراء وكرتين زرقاوين و٥ كرات بيضاء، سحبت كرتان عشوائياً مع الإرجاع. احسب احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

١ أن يكون لون الكرتين أزرق

٢ أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية بيضاء

٣ أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء

الحل

السحب مع الإرجاع ⇐ الأحداث مستقلة

بفرض الحدث أ «الكرة زرقاء» ⇐ ل(أ) = $\frac{٢}{١٠}$

الحدث ب «الكرة بيضاء» ⇐ ل(ب) = $\frac{٥}{١٠}$

الحدث حـ «الكرة حمراء» ⇐ ل(حـ) = $\frac{٣}{١٠}$

١ احتمال الحدث «الكرتان المسحوبتان لونهما أزرق» يعبر عنه بالصورة ل (زرقاء وزرقاء)

$$ل(أ) \times ل(أ) = \frac{٢}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٢٥}$$

٢ احتمال الحدث «الكرة الأولى زرقاء والثانية بيضاء» يعبر عنه بالصورة ل (زرقاء وبيضاء)

$$ل(أ) \times ل(ب) = \frac{٢}{١٠} \times \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{١٠}$$

٣ احتمال الحدث «الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء» يعبر عنه بالصورة ل (حمراء وزرقاء)

$$ل(حـ) \times ل(أ) = \frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{٣}{٥٠}$$

الصورة العامة لقاعدة الضرب الأولى

قاعدة

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، .... ، ك أحداث مستقلة فإن:

$$ل(أ \cap ب \cap حـ \ldots \cap ك) = ل(أ) \times ل(ب) \times ل(حـ) \times \ldots \times ل(ك)$$

مثال ٤

عند رمي قطعة نقود منتظمة خمس مرات أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية :

١ أ «ظهور الصورة في كل رمية»

٢ ب «ظهور الكتابة في رمية واحدة على الأقل»

الحل

١ $ل(\overline{أ}) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣٢}$

$\overline{أ}$ «عدم ظهور الصورة في كل رمية»

ب «ظهور الكتابة في رمية واحدة على الأقل»

لاحظ أن ظهور الكتابة في رمية واحدة على الأقل هو نفسه عدم ظهور الصورة في كل رمية .

٢ $ل(ب) = ل(\overline{أ}) = ١ - ل(أ)$

$$= ١ - \frac{١}{٣٢} = \frac{٣١}{٣٢}$$

تمارين ١-٤

١ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين، ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$ أوجد ل(ب)

٢ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين بحيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ أوجد:

١ ل(أ ∪ ب)

٢ ل(أ ∩ $\overline{ب}$)

٣ إذا كان ل(أ) = س ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ ، ل(ب) =٠,٣ أوجد قيمة ل(أ) في كل من الحالتين:

١ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين

٢ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين

٤ إذا كان احتمال أن يصيب أحمد الهدف هو ٠,٢٥ واحتمال أن يصيب علي الهدف هو ٠,٨ . أوجد احتمال إصابة الهدف إذا صوب كلٌ من أحمد وعلي نحو الهدف.

٥ عند إلقاء ثلاث قطع من النقود وملاحظة الوجه الظاهر، إذا كان الحدث أ هو «ظهور الصورة ثلاث مرات أو الكتابة ثلاث مرات»، والحدث ب هو «ظهور الصورة مرتين على الأقل».
أثبت أن:

١ الحدثين أ ، ب مستقلان

٢ الحدثين أ ، ب غير متنافيين

٦ أعلنت إحدى الدوائر الحكومية عن حاجتها إلى عدد من الموظفين، وتم اختيار عامر وخالد للمقابلة الشخصية فإذا كان احتمال نجاح عامر ٠,٧ واحتمال نجاح خالد ٠,٨ .
أوجد احتمال الأحداث التالية:

١ نجاحهما معاً في المقابلة.

٢ نجاح أحدهما على الأقل.

٣ نجاح خالد فقط.

تمارين عامة ١-٥

١ إذا كانت أ ، ب ، حـ أحداثاً متنافية، وكان ل(أ) = $\frac{١}{١٠}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٤}$
ل(حـ) = $\frac{١}{٣}$ أوجد كلاً مما يلي:

أ ل(أ ∩ حـ)
ب ل($\overline{أ}$)
حـ ل(أ ∪ ب)
د ل(أ ∪ ب ∪ حـ)

٢ إذا اخترنا عشوائياً عدداً صحيحاً من بين الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ٣٠
فأوجد احتمال ألا يقبل العدد القسمة على أحد العوامل الأولية للعدد ٦

٣ صندوق به ١٠٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ سحبت بطاقة عشوائياً بدون إرجاع.
أوجد احتمال كلٍّ من:

أ العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على ١٠
ب العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على ١٩
حـ العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على ١٠ أو ١٩

٤ إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٠٥
أوجد احتمال كلٍّ من:

أ وقوع أحد الحدثين على الأقل.
ب وقوع أ وعدم وقوع ب.
حـ عدم وقوع الحدثين أ ، ب معاً.
د وقوع أحد الحدثين فقط.

٥ اختيرت ثلاث بذور للزهور معا عشوائياً من كيس يحوي أربع بذور زهورها بيضاء وخمس بذور زهورها حمراء، وست بذور زهورها صفراء.
أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

أ البذور الثلاث المختارة زهورها بيضاء اللون
ب البذور الثلاث المختارة زهورها مختلفة في اللون
حـ البذور الثلاث المختارة زهورها من نفس اللون

٦ صندوق به ١٥ مصباحاً من بينها ٥ مصابيح معيبة سحب مصباحان معاً عشوائياً.
أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

أ المصباحان صالحان
ب المصباحان معيبان
جـ أحدهما على الأكثر معيب
د أحدهما على الأقل معيب

٧ إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ أوجد ل(ب) في كل من الحالات التالية:

أ أ ، ب حدثان مستقلان
ب أ ، ب حدثان متنافيان
جـ أ ⊂ ب

٨ إذا كان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ أوجد

أ ل(أ ∩ ب)
ب ل(أ ∩ $\overline{ب}$)

٩ إذا كان احتمال أن ينجح أحمد في امتحانٍ ما هو ٠,٤ واحتمال أن ينجح علي في نفس الامتحان ٠,٣ أوجد احتمال عدم نجاح أي منهما في الامتحان.

١٠ إذا علم أن احتمال أن يكون الجو ملبداً بالغيوم هو ٠,٣ واحتمال أن يكون الجو عاصفاً ٠,٤ واحتمال أن يكون الجو ملبداً بالغيوم أو عاصفاً هو ٠,٦ .
أوجد احتمال كلٍّ من الأحداث التالية:

أ أن يكون الجو عاصفاً وملبداً بالغيوم
ب أن يكون الجو عاصفاً وغيرملبد بالغيوم

قائمة بالمفردات الرياضية

باللغة الإنجليزية	باللغة العربية
Random Experiment	التجربة العشوائية
Sample Space	فضاء العينة
Tree Diagram	الشجرة البيانية
Event	الحدث
Sure Event	الحدث المؤكد
Compound Event	الحدث المركب
Impossible Event	الحدث المستحيل
Simple Event	الحدث البسيط
Mutually Exclusive Events	الحدثان المتنافيان
The Complement Event	الحدث المتمم
Probability	الاحتمال
The Axioms Of Probability	مسلمات الاحتمال
Independent Events	الأحداث المستقلة

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية وتوزيعاتها

Random variables and distributions

٢ - ١ المتغيرات العشوائية Random Variables

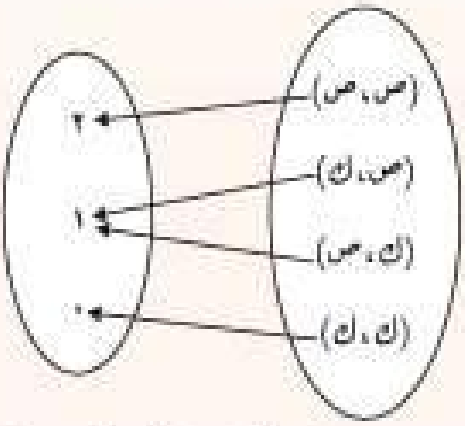
مقدمة:

تعرفنا في الفصل السابق على التجربة العشوائية وفضاء العينة المقابل لها وسوف نهتم في هذا الفصل بمتغير آخر مرتبط بالتجربة العشوائية.

على سبيل المثال في تجربة رمي قطعة نقود مرتين فإن فضاء العينة لهذه التجربة:

ف = {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)}

فإذا كان اهتمامنا في هذه التجربة منصباً على «عدد الصور» التي تظهر في الرميتين في هذه الحالة فإننا نقرن كل عنصر في فضاء العينة ف بعدد الصور على النحو المبين بالشكل



ويكون لدينا متغير عشوائي يعبر عن «عدد الصور» في الرميتين نرمز له بالرمز س

واضح أن س دالة مجال تعريفها هو فضاء العينة ف والتي تقرن كل عنصر فيه بعدد حقيقي حسب قاعدة اقتران الدالة أي أن س : ف ← ح

ف	(ص،ص)	(ص،ك)	(ك،ص)	(ك،ك)
س	٢	١	١	٠

المتغير العشوائي Random Variable

المتغير العشوائي تتحدد قيمته بنتيجة تجربة عشوائية. وبصورة رياضية فإن المتغير العشوائي هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح

أي أن س : ف ← ح

تذكر أن:

للدالة مجالاً ومجالاً مقابلاً وقاعدة اقتران تعين لكل عنصر من عناصر المجال عنصراً في المجال المقابل

ملاحظة

سوف نستخدم $س_1$ ، $س_2$ ، . . . للرمز للمتغيرات العشوائية، و س، ص لقيم هذه المتغيرات وتصنف المتغيرات العشوائية إلى متقطعة أو متصلة بناء على القيم التي يأخذها المتغير.

٢-١م المتغير العشوائي المتقطع Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان مدى المتغير العشوائي مجموعة منتهية أو غير منتهية وقابلة للعد من الأعداد الحقيقية فإنه يسمى متغيراً عشوائياً متقطعاً.

لاحظ أن:

١ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} مجموعة منتهية

٢ {١ ، ٢ ، ٣ ، ...} مجموعة غير منتهية وقابلة للعد.

٣ (٠ ، ١) مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد.

أمثلة على المتغيرات العشوائية المتقطعة:

- عدد السيارات التي سوف تباع في أحد المعارض في الشهر القادم.
- عدد المنازل في منطقة سكنية اختيرت عشوائياً. لماذا؟
- عدد الأسماك التي سوف يتم صيدها في رحلة صيد.
- عدد المكالمات التليفونية التي سوف يتم استقبالها في بدالةٍ ما في الأسبوع القادم

مثال ١

في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين

بفرض أن المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الصور - عدد الكتابات»

أوجد مدى المتغير س ثم بين نوعه.

الحل

ف = {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)}

ف	س = عدد الصور - عدد الكتابات
(ص ، ص)	٢ - ٠ = ٢
(ص ، ك)	١ - ١ = ٠
(ك ، ص)	١ - ١ = ٠
(ك ، ك)	٠ - ٢ = -٢

مدى المتغير العشوائي س = {٢ ، ٠ ، -٢} ونوعه متغير عشوائي متقطع.

لاحظ أن المدى مجموعة منتهية.

مثال ٢

في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية

أوجد مدى المتغير العشوائي س الذي يعبر عن «عدد الصور» ثم بين نوعه.

الحل

ف = {(ص، ص، ص) ، (ص، ص، ك) ، (ص، ك، ص) ، (ك، ص، ص) ، (ك، ك، ص) ، (ك، ص، ك) ، (ص، ك، ك) ، (ك، ك، ك)}

مدى المتغير العشوائي س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

ونوعه متغير عشوائي متقطع.

ف	س «عدد الصور»
(ص، ص، ص)	٣
(ص، ص، ك)	٢
(ص، ك، ص)	٢
(ك، ص، ص)	٢
(ك، ك، ص)	١
(ك، ص، ك)	١
(ص، ك، ك)	١
(ك، ك، ك)	٠

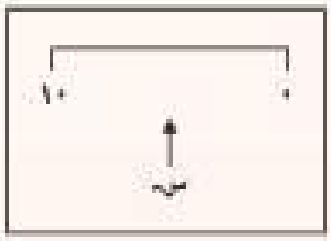
٢-١ب المتغير العشوائي المتصل Continuous Random Variable

تعريف:

المتغير العشوائي المتصل هو الذي يحوي مداه فترة من الأعداد الحقيقية.

فمثلا

إذا كان أقصى عمر افتراضي لنوع من البطاريات هو ١٠ ساعات وكان س~ هو عُمر بطارية اختيرت عشوائياً، فإن س~ هي متغير عشوائي متصل مداه الفترة [٠، ١٠] وكل نقطة في هذه الفترة هي قيمة ممكنه للمتغير س~ كما هو موضح في الشكل:



وإليك بعض الأمثلة عن المتغير العشوائي المتصل:

- طول طالب تم اختياره عشوائياً من طلاب الصف العاشر.
- وزن السمك الذي سيتم اصطياده في رحلة صيد سوف تقوم بها في نهاية الأسبوع القادم.
- درجة الحرارة العظمى خلال الأسبوع القادم في مدينة الكويت.

تمارين ٢-١

أولاً: بنود موضوعية:

في البنود من (١ - ٥) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، وظلل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة:

١ الوقت الذي يستغرقه طالب اختير عشوائياً في الإجابة عن اختبار هو متغير عشوائي متقطع. (أ) (ب)

٢ في تجربة رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين، فإن «عدد الكتابات × عدد الصور» متغير عشوائي متصل. (أ) (ب)

٣ كمية البنزين في خزان وقود سيارة اختيرت عشوائياً هو متغير عشوائي متصل. (أ) (ب)

٤ نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متقطع. (أ) (ب)

٥ السرعة المسجلة لسيارة مخالفة لسرعة تم اختيارها عشوائياً هو متغير عشوائي متصل. (أ) (ب)

ثانيا: أسئلة مقالية:

١ بين أياً مما يأتي يعتبرُ متغيراً عشوائياً متقطعاً أو متغيراً عشوائياً متصلاً:

أ عدد مخالفات السرعة المسجلة على الدائري الرابع خلال يوم تم اختياره عشوائياً.

ب الوقت الذي مكثه شخص بسيارته في موقف للسيارات.

جـ عدد علب المشروبات الغازية التي سوف تباع خلال يوم من ماكينة البيع.

د الوقت الذي يستغرقه الطبيب في فحص مريض اختير عشوائياً.

هـ عدد الأهداف المسجلة في مباراة لكرة القدم اختيرت عشوائياً

٢ في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية إذا كان المتغير العشوائي س هو «عدد الكتابات». أوجد مدى س.

٣ كيس به ثلاث بطاقات مرقمة من ١ إلى ٣، سحبت عشوائياً بطاقتان الواحدة تلو الأخرى مع الإرجاع فإذا كان المتغير العشوائي س هو «مجموع العددين على البطاقتين». أوجد مدى س.

٢ - ٢ دالة المتغير العشوائي المتقطع

٢-٢أ دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

probability distribution function of discrete random variable

تعريف:

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه {س١ ، س٢ ، س٣ ، ...} فإن دالة التوزيع الاحتمالي د تعرف كالتالي:

د(س_ر) = احتمال (س = س_ر)

أي ان د(س_ر) = ل(س = س_ر) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

س	س١	س٢	....
د(س)	د(س١)	د(س٢)	....

مثال ١

في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين وبفرض أن المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الصور». أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل

ف = {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)}

عدد عناصر ف = ٤

(ص،ص) ← عدد الصور = ٢

(ص،ك) ← عدد الصور = ١

(ك،ص) ← عدد الصور = ١

(ك،ك) ← عدد الصور = ٠

إذن المدى = {٠ ، ١ ، ٢}، س متغير عشوائي متقطع

$$د(٠) = ل(س = ٠) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{١}{٤} ،$$

$$د(١) = ل(س = ١) = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

$$د(٢) = ل(س = ٢) = \frac{١}{٤}$$

وتكون دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هي:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

ملاحظة هامة

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س تحقق الشرطين التاليين:

١ $٠ \leqslant د(س) \leqslant ١$

٢ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي تساوي الواحد الصحيح

أي أن: $د(س_١) + د(س_٢) + د(س_٣) + ... = ١$

مثال ٢

أي التوزيعات التالية تمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س :

أ

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٠٨	٠,١١	٠,٣٩	٠,٢٧

ب

س	٢	−٣	٤	٥,٥
د(س)	٠,٢	٠,٣٩	٠,٢٨	٠,١٣

ج

س	٧	٨	٩
د(س)	٠,٧	٠,٥	- ٠,٢

د

س	٥	٦	٧	٨
د(س)	٠,٣	٠,٥	٠,٢	٠,١

الحل

أ الجدول لا يمثل دالة التوزيع الاحتمالي لأن مجموع قيم د(س) لا تساوى الواحد

ب يمثل دالة التوزيع الاحتمالي لتحقق الشروط

ج لا يمثل دالة التوزيع الاحتمالي لأن د(٩) سالبة

د لا يمثل دالة التوزيع الاحتمالي لأن مجموع قيم الدالة أكبر من الواحد

مثال ٣

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هي:

س	- ١	٠	١
د(س)	٠,٢	ك	٠,٤

أوجد قيمة ك .

الحل

مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي تساوي الواحد الصحيح

د(-١) + د(٠) + د(١) = ١

٠,٢ + ك + ٠,٤ = ١

ك = ١ - ٠,٦ = ٠,٤

مثال ٤

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه هو {−١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكان

د(−١) = ٠,١ ، د(٢) = ٠,٢ ، د(٣) = ٠,٤

أوجد د(٤) ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س .

الحل

د(−١) + د(٢) + د(٣) + د(٤) = ١

٠,١ + ٠,٢ + ٠,٤ + د (٤) = ١

د(٤) = ٠,٣

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هي:

س	−١	٢	٣	٤
د(س)	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣

٢-٢ب دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع

Cumulative Distribution Function of Discrete Random Variable

تعرف دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع س عند القيمة أ بأنها احتمال قيمة المتغير العشوائي س وتكون أصغر من أو تساوى أ.

أي أن: ت(أ) = ل(س ≤ أ)

مثال ٥

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

س	٢	٣	٤
د(س)	٠,٣	٠,٤٥	٠,٢٥

أوجد: ت(١) ، ت(٢) ، ت(٣) ، ت(٣,٥) ، ت(٤) ، ت(٥)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير س .

الحل

ت(١) = ل(س ≤ ١) = ٠

ت(٢) = ل(س ≤ ٢) = د(٢) = ٠,٣

ت(٣) = ل(س ≤ ٣) = د(٢) + د(٣) = ٠,٣ + ٠,٤٥ = ٠,٧٥

ت(٣,٥) = ل(س ≤ ٣,٥) = د(٢) + د(٣) = ٠,٧٥

ت(٤) = د(٢) + د(٣) + د(٤) = ١

ت(٥) = ل(س ≤ ٥) = د(٢) + د(٣) + د(٤)

= ٠,٣ + ٠,٤٥ + ٠,٢٥ = ١

ملاحظة

إذا كانت ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س فإن:

١ ل(أ < س ≤ ب) = ت(ب) − ت(أ)

٢ ل(س > أ) = ١ − ت(أ)

مثال ٦

بعض قيم دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س معطاة في الجدول التالي:

س	−١	٣	٦,٥	٧
ت(س)	٠,١	٠,٤٥	٠,٧	١

أوجد: أ ل(س > ٣)

ب ل(−١ < س ≤ ٦,٥)

الحل

أ ل(س > ٣) = ١ − ت(٣) = ١ − ٠,٤٥ = ٠,٥٥

ب ل(−١ < س ≤ ٦,٥) = ت(٦,٥) − ت(−١)

= ٠,٧ − ٠,١

= ٠,٦

تمارين ٢-٢

١ أي من التوزيعات التالية لا يمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير س :

أ

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,١	٠,٠٥	٠,٤٥	٠,٤

ب

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٣٥	٠,٣	٠,٢	٠,٢٥

جـ

س	٧	٨	٩
د(س)	−٠,٢	٠,٥	٠,٣

د

س	١	٣	٥	٧	٩	١١
د(س)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$

هـ

س	٣	٦	٩	١٢	١٥
د(س)	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٨}$

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات، س هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن «عدد الكتابات». أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

٣ الجدول التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س

س	−١	١	٢,٥	٣,٨
د(س)	٠,٢	٠,٣	٠,١	٠,٤

أوجد:

١ ل(س ≤ ٢,٥)

٢ ل(س ≥ ١)

٤ الجدول التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س

س	١,٢	٣	٥,٣	٧
د(س)	٠,٢	ك	٠,١	٠,٣

أوجد قيمة ك.

٥ بفرض أن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,١	٠,٣

أوجد: ت(−١) ، ت(١,٥) ، ت(٣) ، ت(٤)، حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير س

٦ بعض قيم دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س معطاة في الجدول التالي:

س	٢	٣	٣,٥	٧
ت(س)	٠,١	٠,٤	٠,٧	١

أوجد: ل(س ≥ ٣) ، ت(٣,٥)

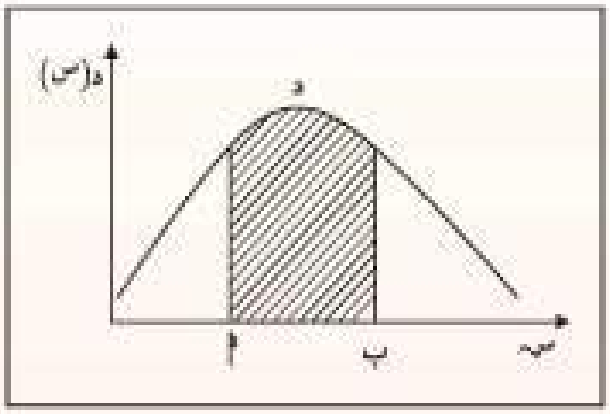
ل(٢ < س ≤ ٣,٥)

٢ - ٣ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل

Probability Density Function Of Continuous Random Variable

يتم في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة، حساب ل(أ < س ≤ ب) بحساب المساحة تحت منحنى الدالة د بين القيمتين أ ، ب.

وتسمى د دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل س كما هو موضح بالشكل.



خواص دالة كثافة الاحتمال:

إذا كانت د دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل س فإن:

١ منحنى الدالة د لا يأخذ قيماً سالبة

٢ مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة د وفوق محور السينات تساوي الواحد الصحيح

ملاحظة

تنعدم مساحة المنطقة المظللة في الشكل السابق إذا كان أ = ب

أي أن لأي متغير عشوائي متصل ل(س = أ) = ٠

مثال ١

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

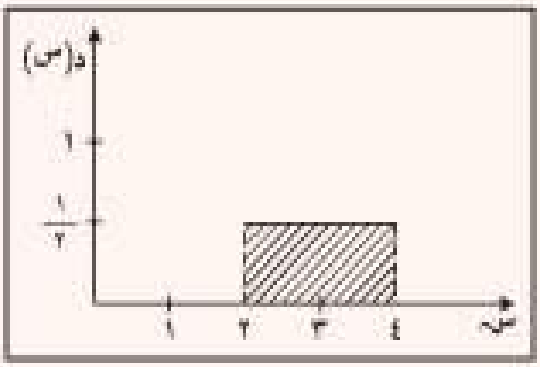
١ ل(٢ < س ≤ ٤)

٢ ل(س ≥ ٢,٥)

الحل

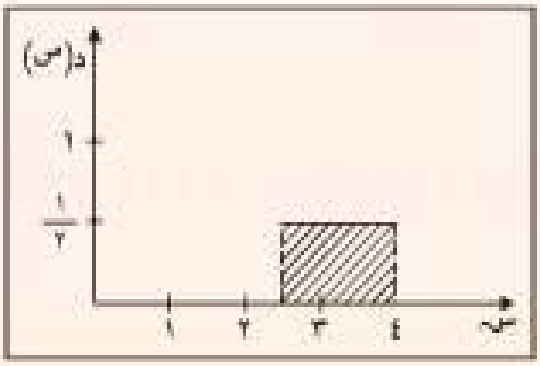
١ ل(٢ < س ≤ ٤) = مساحة المنطقة المظللة (المنطقة المستطيلة)

$= ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$



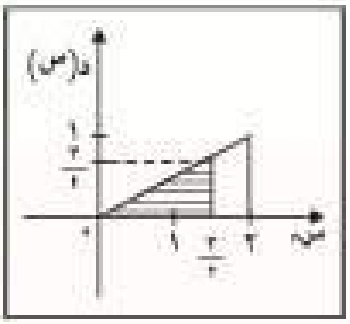
٢ ل(س ≥ ٢,٥) = مساحة المنطقة المظللة (المنطقة المستطيلة)

$= ١\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$



مثال ٢

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:



$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٢}\text{س} & ، \quad ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ \text{صفر} & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

١ $\text{ل}(\text{س} \leqslant \frac{٣}{٢})$

٢ $\text{ل}(\text{س} > \frac{٣}{٢})$

الحل

١ $\text{ل}(\text{س} \leqslant \frac{٣}{٢})$ = مساحة منطقة المثلث المظللة بالشكل المجاور

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{٣}{٤}$$

$$= \frac{٩}{١٦}$$

٢ $\text{ل}(\text{س} > \frac{٣}{٢}) = ١ - \text{ل}(\text{س} \leqslant \frac{٣}{٢})$

$$= ١ - \frac{٩}{١٦}$$

$$= \frac{٧}{١٦}$$

تمارين ٢-٣

أسئلة مقالية :

١ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(١ < س ≤ ٤)

ب ل(س ≤ ١)

٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦} & \text{عندما } -٣ \leqslant س \leqslant ٣ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(س < ٠)

ب ل(-١ ≤ س ≤ ٣)

٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} س & ٠ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(٠ ≤ س ≤ ٢)

ب ل(س ≤ ٢)

جـ ل(س > ٢)

بنود موضوعية:

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ إذا كان سـ متغيراً عشوائياً يأخذ القيم ٢، ٣، ٤ وكان ل(س = ٢) = ٠,٢، ل(س = ٣) = ٠,١ فإن ل(سـ = ٤) =

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٧ (د) ليس أياً مما سبق

٢ إذا كان سـ متغيراً عشوائياً يأخذ القيم -١، ١، ١,٥ وكان ل(س = -١) = ٠,٦، ل(س = ١) = ٠,٣، فإن ل(سـ > ٠) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٩ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٧

٣ إذا كان سـ متغيراً عشوائياً متصل دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢}س & \text{عندما } -١ \leqslant س \leqslant ١ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن ل(سـ = ١) =

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ليس أياً مما سبق

٢ - ٤ التوقع (الوسط) والتباين لمتغير عشوائي متقطع

Expectation and Variance of a Discrete Random Variable

مقدمة:

في التطبيقات العملية لا نحتاج لوصف المتغيرات العشوائية وصفاً تاماً باستخدام دالة كثافة الاحتمال أو دالة التوزيع التراكمي لهذه المتغيرات ولكن نكتفي في بعض الأحيان بإعطاء بعض التصورات عن هذه المتغيرات من خلال أعداد تقيس القيمة المتوسطة لها وهي القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي (التوقع) وهناك أيضا عدد آخر يقيس تشتت قيم المتغير العشوائي عن قيمته المتوسطة وهو التباين.

فالتوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس الآن التعريفات الرياضية لكل من التوقع والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولاً: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي:

التوقع للمتغير العشوائي المتقطع س هو أحد مقاييس النزعة المركزية ويرمز له بالرمز μ

تعريف:

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي د ومداه {$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، ...} فإن التوقع للمتغير العشوائي س يعطى من الصيغة التالية:

$$\mu = \sum_{ر} س_ر \times د(س_ر)$$

أي أن $\mu = س_1 \times د(س_1) + س_2 \times د(س_2) + ...$

مثال ١

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

س	-١	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١	٠,٣

أوجد التوقع μ للمتغير العشوائي س .

الحل

التوقع μ = $\sum$ س$_{ر}$ × د(س$_{ر}$)

= -١ × ٠,٢ + ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,٣ + ٢ × ٠,١ + ٣ × ٠,٣

= -٠,٢ + ٠ + ٠,٣ + ٠,٢ + ٠,٩

= ١,٢

مثال ٢

اختيرت عشوائياً أسرة من بين الأسر التي لديها طفلان، أوجد:

١ دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س يعبر عن «عدد الأطفال البنات» (بفرض أن احتمال كون الطفل ولداً يساوي احتمال كون الطفل بنتاً).

٢ التوقع(الوسط) لهذه الدالة.

الحل

ف = {(ولد،ولد)، (بنت، ولد)، (ولد، بنت)، (بنت، بنت)}

١ وتكون دالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرين هي:

س	٠	١	٢
د(س)	٠,٢٥	٠,٥	٠,٢٥

٢ التوقع (الوسط) = $\sum$ س$_{ر}$ × د(س$_{ر}$)

= ٠ × ٠,٢٥ + ١ × ٠,٥ + ٢ × ٠,٢٥ = ١

ملاحظة

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً فإن حساب μ يتم باستخدام صيغة رياضية لن يتم التعرض لها في هذا المقرر.

ثانياً: تباين المتغير العشوائي:

التباين لمتغير عشوائي متقطع س يقيس مقدار انتشار أو تشتت المتغير العشوائي عن قيمته المتوقعة ويرمز له بالرمز σ^2

تعريف:

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً له دالة التوزيع الاحتمالي د فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى من الصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \sum_{\text{ر}} \text{س}_{\text{ر}}^2 \, \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) - \mu^2$$

يلاحظ أن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي س هو الجذر التربيعي للتباين ويرمز له بالرمز σ .

مثال ٣

الجدول التالي يوضح دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٤	٠,٣	٠,١

فأوجد: أ التوقع ب التباين ج الانحراف المعياري

الحل

نكوّن الجدول الآتي الذي يساعدنا في حساب التوقع والتباين:

س	د(س)	س × د(س)	س^2 × د(س)
٠	٠,٢	٠	٠
١	٠,٤	٠,٤	٠,٤
٢	٠,٣	٠,٦	١,٢
٣	٠,١	٠,٣	٠,٩
المجموع	١	١,٣	٢,٥

أ التوقع = $\sum_{ر} س_ر \times د(س_ر)$

= ١,٣

ب التباين = $\sum_{ر} س_ر^2 \, د(س_ر) - \mu^2$

= ٢,٥ − $(١,٣)^2$

= ٠,٨١

ج الانحراف المعياري = $\sqrt{٠,٨١}$ = ٠,٩ .

مثال ٤

٤ بطاقات متماثلة مرقمة بالأرقام ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ وضعت في كيس، سحبت بطاقة عشوائياً فإذا كان س هو «الرقم المدون على البطاقة المسحوبة من الكيس» فأوجد التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي س.

الحل

أولاً: نوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

س	٠	٢	٤	٦
د(س)	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٢٥

ثانياً: نوجد التوقع:

$\mu = \sum_{ر} س_ر \times د(س_ر)$

= ٠ × ٠,٢٥ + ٢ × ٠,٢٥ + ٤ × ٠,٢٥ + ٦ × ٠,٢٥

= ٣

التباين $\sigma^2 = \sum_{ر} س_ر^2 \, د(س_ر) - \mu^2$

= $(٠)^2$ × ٠,٢٥ + $(٢)^2$ × ٠,٢٥ + $(٤)^2$ × ٠,٢٥ + $(٦)^2$ × ٠,٢٥ − $(٣)^2$

= ٠ + ١ + ٤ + ٩ − ٩

= ٥

فإن الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{٥}$

تمارين ٢-٤

أسئلة مقالية:

١ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة التوزيع الاحتمالي له هي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

أوجد: أ التوقع ب التباين جـ الانحراف المعياري

٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه الاحتمالي هي:

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٤	٠,٢	ك	٠,١

أوجد: أ قيمة ك ب التوقع والانحراف المعياري

٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه الاحتمالي هي:

س	-٢	-١	١	٢
د(س)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

فأوجد: أ التوقع ب الانحراف المعياري

بنود موضوعية:

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه الاحتمالي هي:

س	٠	١	٢
د(س)	٠,٢٥	٠,٥٠	٠,٢٥

فإن التوقع له يساوي

(أ) ١ (ب) ١,٢٥ (جـ) ١,٥ (د) ٠,٥

٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً، التوقع = ٠,٥ ،

$\sum$ س^{٢} × د(س) = ٤,٢٥ فإن الانحراف المعياري له هو

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣,٧٥ (د) ١

تمارين عامة ٢-٥

١ في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة مرتين وبفرض أن المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الكتابات»

أ أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

ب أوجد التوقع (الوسط) μ.

جـ أوجد التباين σ^2.

د أوجد الانحراف المعياري σ.

٢ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٤} & : ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

١ ل(س $\leqslant$ ٤)

٢ ل(س > ٣)

٣ ل(س = ٥)

٣ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه الاحتمالي هو

س	٠	١	٢	٣
د(س)	٠,٢	٠,٣	ك	٠,١

أوجد قيمة ك ثم أوجد كلاً من:

١ التوقع

٢ التباين

٣ الانحراف المعياري

٤ إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي د حيث

$$د(س) = \begin{cases} ٠,٥\ س & : \ ٠ \leqslant س \leqslant ٢ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد ل(٠ ⩽ س ⩽ ١)

٥ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة توزيعه الاحتمالي هي:

س	١	٢	٣
د(س)	٢ك	٢ك	ك

أوجد قيمة ك ثم أوجد الانحراف المعياري للمتغير العشوائي س

٦ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً التوقع (الوسط) له μ = ٠,٢

وكان: $\sum$ (س$_ر$)^٢ × د(س$_ر$) = ٤,٤ أوجد التباين

٧ إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكان د(١) = ٠,٢ ، د(٣) = ٠,٢ ، د(٤) = ٠,٤ حيث د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

أ أوجد د(٢)

ب اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

جـ أوجد التوقع

٨ بفرض أن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س هي:

س	-١	٠	١	٢
د(س)	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣

أوجد:

ت(-١) ، ت(١,٥) ، حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س

قائمة بالمفردات الرياضية

باللغة الإنجليزية	باللغة العربية
Variable	المتغير
Random	العشوائي
Discrete Random Variable	المتغير العشوائي المتقطع
Continuous Random Variable	المتغير العشوائي المتصل
Probability distribution function	دالة التوزيع الاحتمالي
Cumulative distribution function	دالة التوزيع التراكمي
Probability Density Function	دالة كثافة الاحتمال
Expectation	التوقع
Variance	التباين

الفصل الثالث

توزيعات احتمالية هامة

Important Probability Distributions

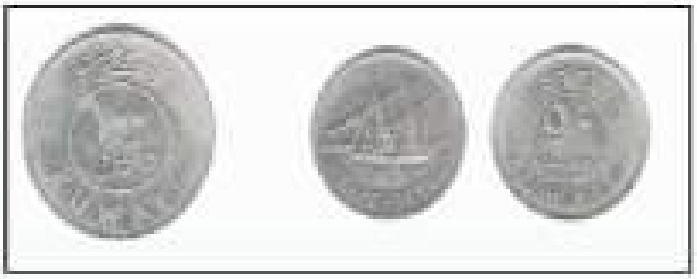
٣ - ١ توزيع ذي الحدين.

٣ - ٢ التوزيع الطبيعي.

٣ - ٣ تمارين عامة.

٣ - ١ توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

أنواع كثيرة من التجارب العشوائية يكون لها ناتجان فقط أو عدة نواتج يمكن أن تختزل إلى ناتجين فقط.



فعلى سبيل المثال:

- عند رمي قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الناتج سوف نحصل إما على «صورة» أو «كتابة».
- عند اختيار وحدة عشوائية من خط إنتاج أحد المصانع سوف نحصل إما على وحدة «سليمة» أو «غير سليمة» بناء على اختبار الجودة.
- عند تأديتك اختباراً في مادة ما سوف تكون النتيجة إما «نجاحاً» أو «رسوباً».

سوف نسمي أي تجربة من هذا النوع بمحاولة ذات الحدين أو محاولة برنولي (نسبة إلى العالم برنولي).

ونسمي الناتج محل الاهتمام «نجاحاً» والناتج الآخر «فشلاً».

فمثلاً إذا كان اهتمامنا هو الوحدات غير السليمة من خط إنتاج أحد المصانع فيكون ناتج الحصول عليها «نجاح».

تعريف:

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

1. **تتكون التجربة من عدد ن من المحاولات المستقلة والمتماثلة.**
2. **كل محاولة لها ناتجان إما «نجاح» أو «فشل».**
3. **احتمال الحصول على نجاح يبقى ثابتا من محاولة إلى أخرى ويرمز له بالرمز ل.**
4. **جميع المحاولات مستقلة عن بعضها.**

وترتبط تجربة ذات الحدين بمتغير عشوائي يسمى بمتغير ذات الحدين ويعرف على أنه «عدد مرات النجاح» وله دالة توزيع احتمالي تسمى بتوزيع ذي الحدين وتعطى بالعلاقة التالية:

$$د(س) = \binom{ن}{س} ل^{س}(١ - ل)^{ن-س} \quad ، \quad ن \in ص_{+}$$

ن عدد المحاولات

س يمثل عدد مرات النجاح في ن من المحاولات

ل يمثل احتمال النجاح

(١ - ل) يمثل احتمال الفشل

ويمكن إيجاد قيم د(ص) بالحساب المباشر أو باستخدام جدول الاحتمالات لتوزيع ذي الحدين (المرفق في آخر الكتاب) حيث يمثل العمود الأول من اليسار قيم ن والعمود الذي يليه قيم ص والسطر الأفقي في أعلى الجدول قيم ل

مثال ١

رميت قطعة نقود معدنية ثلاث مرات. أوجد احتمال الحصول على «صورتين فقط»

الحل

أولاً: يمكن الحل بالنظر إلى فضاء العينة لهذه التجربة

ف = {(ص، ص، ص) ، (ص، ص، ك) ، (ص، ك، ص) ، (ك، ص، ص) ،

(ك، ك، ص) ، (ك، ص، ك) ، (ص، ك، ك) ، (ك، ك، ك)}

الإجابة هي $\frac{٣}{٨}$ = ٠,٣٧٥

ثانياً: يمكن الحل بتطبيق المتطلبات المشار إليها في تعريف تجربة ذات الحدين:

- هناك ناتجان فقط لكل محاولة صورة أو كتابة.
- هناك عدد محدد (ثابت) من المحاولات وهي ثلاثة.
- نواتج كل محاولة مستقلة بعضها عن البعض الآخر.
- احتمالية النجاح في كل محاولة (ظهور صورة) هي نفسها وتساوي $\frac{١}{٢}$.

إذن د(٢) = $\binom{٣}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}$

$$= \frac{٣!}{(٣-٢)!\,٢!} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨} = ٠,٣٧٥$$

حل آخر:

أو يمكن إيجاد قيمة د(٢) من جدول الاحتمالات

حيث يمثل ن = ٣ ، ص = ٢ ، ل = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥

ومنه د(٢) = ٠,٣٧٥

مثال ٢

احتمال أن يطلب مسافر على إحدى الطائرات وجبة نباتية للعشاء هو ٢٠٪. أوجد احتمال أن يطلب ٤ أفراد من بين ١٠ مسافرين وجبة نباتية.

س = ٤ ، ن = ١٠ ، ل = احتمال أن يطلب المسافر وجبة نباتية = ٠,٢

١ − ل = ٠,٨

باستخدام الجدول نجد أن د(٤) = ٠,٠٨٨

مثال ٣

نسبة المعيب من إنتاج أجهزة الحاسوب تساوي ٠,٠٥ . فإذا تم عشوائياً سحب ١٥ وحدة من إنتاج المصنع. احسب احتمال أن يكون منها ثلاث وحدات معيبة.

الحل

س = ٣ وحدات معيبة، ن = ١٥

ل = احتمال إنتاج وحدة معيبة في المصنع = ٠,٠٥

١ − ل = احتمال إنتاج وحدة غير معيبة في المصنع = ٠,٩٥

بالتعويض في العلاقة:

$$د(س) = \binom{ن}{س} ل^{س} (١ - ل)^{ن-س}$$

$$= \binom{١٥}{٣} (٠,٠٥)^{٣} (٠,٩٥)^{١٢}$$

$$= \frac{!١٥}{!٣\,!(١٥ - ٣)} \times (٠,٠٥)^{٣} \times (٠,٩٥)^{١٢} = ٠,٠٣١$$

ويمكن إيجاد د(٣) من جدول الاحتمالات وتساوي ٠,٠٣١

وهذا يعني أن احتمال أن يكون بخط الانتاج ٣ وحدات معيبة من بين ١٥ وحدة هو ٠,٠٣١ .

مثال ٤

في المثال السابق احسب احتمال وجود وحدتين معيبتين على الأكثر من بين ١٥ وحدة.

الحل

المطلوب احتمال وحدتين معيبتين على الأكثر تعني ل(س ≤ ٢) وكما تعلمت في الفصل السابق

ل(س ≤ ٢) = د(٠) + د(١) + د(٢)

وباستخدام الجدول نجد أن

ل(س ≤ ٢) = ٠,٤٦٣ + ٠,٣٦٦ + ٠,١٣٥ = ٠,٩٦٤

مثال ٥

عند رمي حجر نرد منتظم خمس مرات،

أوجد:

أ احتمال ظهور الرقم ٣ مرتين

ب احتمال ظهور رقم ٣ مرة واحدة على الأكثر

جـ احتمال ظهور رقم ٣ مرة واحدة على الأقل

الحل

س = عدد مرات ظهور الرقم ٣

ن = ٥

ل = احتمال ظهور رقم ٣ في الرمية الواحدة = $\frac{١}{٦}$

١ - ل = احتمال عدم ظهور رقم ٣ في الرمية الواحدة = $\frac{٥}{٦}$

أ د(٢) = $\binom{٥}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$

باستخدام الآلة الحاسبة د(٢) = ٠,١٣٦

ب ل(س ≤ ١) = د(٠) + د(١)

= $\binom{٥}{٠}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٠}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٥} + \binom{٥}{١}\left(\frac{١}{٦}\right)^{١}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$

باستخدام الآلة الحاسبة

= ٠,٤٠٢ + ٠,٤٠٢

إذن ل(س ≤ ١) = ٠,٨٠٤

ج لاحظ أن ل(س ≥ ١) = ١ − ل(س < ١) = ١ − د(٠)

= ١ − ٠,٤٠٢ = ٠,٥٩٨

مثال ٦

أسرة بها ستة أطفال فإذا كان احتمال أن يكون أي طفل ذكر هو ٠,٥

أوجد:

أ احتمال أن يكون بينهم ثلاثة ذكور فقط

ب احتمال أن يكون عدد الذكور أقل من عدد البنات

الحل

س = عدد الذكور ، ن = ٦

ل = احتمال أن يكون الطفل ذكر = ٠,٥ ، ١ − ل = ٠,٥

أ س = ٣ ذكور باستخدام الجدول

د(٣) = ٠,٣١٢

ب س = عدد الذكور أقل من عدد البنات (أي أن عدد الذكور أقل من ٣)

إذن ل(س < ٣) = د(٠) + د(١) + د(٢)

= ٠,٠١٦ + ٠,٠٩٤ + ٠,٢٣٤

= ٠,٣٤٤

التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدين Expectation And Variance of Binomial Distribution

يمكن حساب التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدين مباشرة من خلال الصيغ التالية:

التوقع μ = ن ل

التباين σ^2 = ن ل(١ − ل)

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\text{ن ل}(١ - \text{ل})}$

مثال ١

رميت قطعة نقود ٤ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري «ظهور صورة».

الحل

ن = ٤ ، س = ظهور الصورة،

ل احتمال ظهور الصورة = $\frac{١}{٢}$ ، ١ − ل = $\frac{١}{٢}$

إذن التوقع μ = ن ل

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

التباين $\sigma^٢$ = ن ل(١ − ل) = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = ١

الانحراف المعياري σ = ١

مثال ٢

يُنتج مصنع سيارات ٢٥٠ سيارة يوميا. فإذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠,٠٢ أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في أحد الأيام.

الحل

ن = ٢٥٠ ، س = عدد السيارات المعيبة

ل = نسبة إنتاج السيارات المعيبة = ٠,٠٢ ، ١ − ل = ٠,٩٨

إذن التوقع μ = ن ل

= ٢٥٠ × ٠,٠٢ = ٥

التباين $\sigma^٢$ = ن ل (١ − ل)

= ٢٥٠ × ٠,٠٢ × ٠,٩٨

= ٤,٩

الانحراف المعياري σ = $\sqrt{٤,٩}$ = ٢,٢١٤ تقريباً

تمارين ٣-١

١ إذا كان ٣٠٪ من العائلات في إحدى البلاد يمتلك كل منها سيارتين لكل عائلة. فإذا تم اختيار ١٠ عائلات عشوائياً. أوجد احتمال ثلاثة يمتلك كل منهم سيارتين.

٢ بفرض أن احتمال استرداد السيارات المسروقة في مدينة ما ٠,٦ من بين عشرة سيارات مسروقة. أوجد:

أ احتمال استرداد ٣ سيارات على الأكثر

ب احتمال استرداد ٧ سيارات على الأقل

٣ يعاني ٢٠٪ من الذين يتناولون دواء معينا الشعور بالنعاس. فإذا تم اختيار ١٤ شخصاً عشوائياً. أوجد احتمال أن يشعر اثنان منهم على الأكثر بالنعاس.

٤ ٣٠٪ من العاملين في مصنع كبير هم من مهندسين. فإذا تم اختيار ٤ من العاملين في المصنع بطريقة عشوائية لحضور مؤتمر. أوجد احتمال أن يكون عدد المهندسين أقلية في هذا الوفد على أن يضم الوفد مهندساً واحداً على الأقل.

٥ في دراسة السلالات بعض الزهور قسمت إلى قسمين (حمراء - بيضاء) وكانت الزهور الحمراء تمثل ٣٠٪ من الزهور. فإذا تم اختيار عينة عشوائية من ١٢ زهرة. أوجد:

أ احتمال عدم وجود زهور حمراء

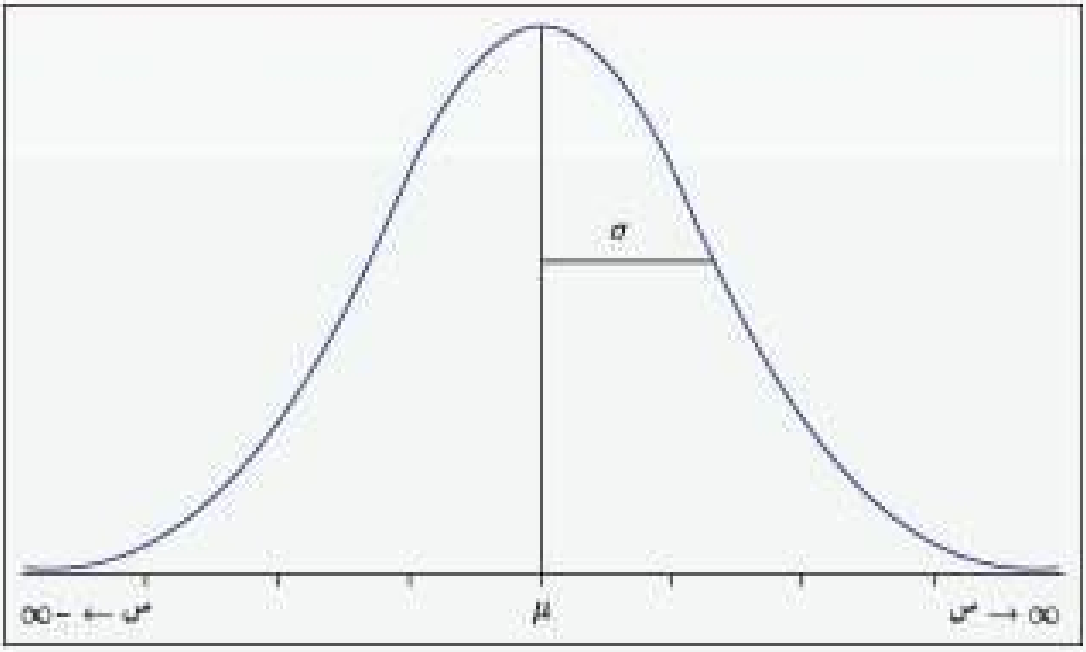
ب احتمال وجود ١٠ زهرات حمراء على الأقل

ج التوقع والتباين لعدد الزهور الحمراء في العينة

د التوقع والتباين لعدد الزهور البيضاء في العينة

٣ - ٢ التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لكثير من المتغيرات المتصلة إذ يستخدم مثل أطوال البالغين وأوزان الأطفال عند الولادة ودرجة الذكاء عند الإنسان... الخ ويوصف التوزيع الطبيعي بمعادلة رياضية تحدد منحناه وهي تتعين تماما بمعرفة كل من المعلمات: التوقع (الوسط) μ والتباين σ^2 ومنحني التوزيع الطبيعي الذي يشبه شكل الجرس، وهو متماثل حول الخط المستقيم س = μ ويتقارب طرفاه من المحور الأفقي حيث يمتد إلى مالا نهاية كما هو موضح بالشكل.



خواص التوزيع الطبيعي:

١. متماثل حول س = μ وشكله يشبه الجرس.
٢. للتوزيع الطبيعي قمة واحدة.
٣. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد.
٤. المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين مساحة كل منهما تساوي النصف.

ويرمز للتوزيع الطبيعي الذي وسطه μ وتباينه σ^2 بالرمز ط(μ ، σ^2)

التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal distribution

هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه صفر وتباينه ١ ونرمز له بالرمز ط (٠ ، ١)، ويرمز للمتغير العشوائي المناظر له بالرمز ن أو (z).

نظرية:

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هو التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2

فإن ن = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعي معياري.

جدول المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

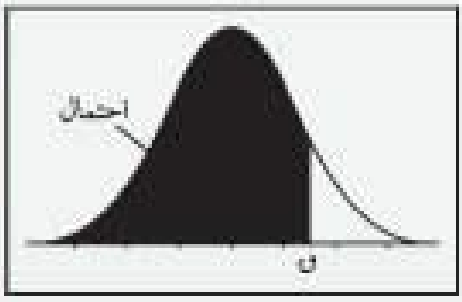
الوسط μ والتباين σ^2 يحددان منحنى التوزيع الطبيعي ونظرا لاختلاف قيم σ^2 ، μ من متغير لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وبذلك نكتفي باستعمال جدول للتوزيع الطبيعي المعياري.

لإيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري نستخدم الجدول المرفق في نهاية الكتاب جدول(١) الذي يعطي المساحة على يسار قيم ن سواء كانت سالبة أو موجبة.

يتم الكشف عن المساحة في هذا الجدول كما يلي:

- يمثل الهامش الرأسي في يسار الجدول العدد الصحيح والجزء العشري الأول، ويمثل الهامش الأفقي في أعلى الجدول الجزء العشري الثاني (جزء من مائة). أما الأعداد في داخل الجدول فهي تمثل احتمالات وقوع المتغير (ن) في الفترة ($-\infty$ ، أ) أي المساحة تحت المنحنى على اليسار من أ

على سبيل المثال:



لإيجاد احتمال وقوع المتغير ن في الفترة ($-\infty$ ، ٠,٩٤) أي مساحة المنطقة المظللة:

نأخذ ٠,٩ في الهامش الرأسي ونتجه أفقيا إلى أن نصل إلى أسفل ٠,٠٤ (في الهامش الأفقي) فنجد أن احتمال المتغير ن (المساحة) = ٠,٨٢٦٤

أي أن ل(ن < ٠,٩٤) = ٠,٨٢٦٤

ن	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩

مثال ١

إذا كان ن متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أوجد:

١ ل(ن ≥ ٢,١٦)

٢ ل(ن ≤ ٢,٥١)

٣ ل(١,٥ ≤ ن ≤ ٢,٤)

تذكر أن:

ل(ن ≤ أ) = ١ − ل(ن < أ)

ل(أ ≤ ن ≤ ب) = ل(ن < ب) − ل(ن < أ)

الحل

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري(١)

١ ل(ن ≥ ٢,١٦) = ٠,٩٨٤٦

٢ ل(ن ≤ ٢,٥١) = ١ − ل(ن < ٢,٥١) = ١ − ٠,٩٩٤٠ = ٠,٠٠٦٠

٣ ل(١,٥ ≤ ن ≤ ٢,٤) = ل(ن < ٢,٤) − ل(ن < ١,٥)

= ٠,٩٩١٨ − ٠,٩٣٣٢ = ٠,٠٥٨٦

مثال ٢

إذا كان ن يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أوجد:

١ ل(ن ≥ −٠,٦٤)

٢ ل(−١,٧ ≤ ن ≤ ٢,٥٨)

٣ ل(−١,٢٣ ≤ ن ≤ −٠,٦٨)

الحل

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري (١)

١ ل(ن ≥ −٠,٦٤) = ٠,٢٦١١

٢ ل(−١,٧ ≤ ن ≤ ٢,٥٨) = ل(ن < ٢,٥٨) − ل(ن < −١,٧)

= ٠,٩٩٥١ − ٠,٠٤٤٦ = ٠,٩٥٠٥

٣ ل(−١,٢٣ ≤ ن ≤ −٠,٦٨) = ل(ن < −٠,٦٨) − ل(ن < −١,٢٣)

= ٠,٢٤٨٣ − ٠,١٠٩٣ = ٠,١٣٩٠

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي ط (μ ، σ^2):

إذا كان المتغير العشوائي س له التوزيع الطبيعي ط (μ ، σ^2) أي التوزيع الذي وسطه μ وانحرافه المعياري σ وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير س فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري (١) المرفق آخر الكتاب باتباع الخطوات الموضحة التالية:

لإيجاد ل(أ < س ≤ ب):

1. نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة أ بالتعويض في العلاقة: $ق_1 = \frac{أ - \mu}{\sigma}$ والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة ب: $ق_2 = \frac{ب - \mu}{\sigma}$
2. نستخدم العلاقة: ل(أ < س ≤ ب) = ل($ق_1$ < ق ≤ $ق_2$)
3. نستخدم جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري (١) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

مثال ١

إذا كان المتغير العشوائي س له التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ = ١٥ وانحرافه المعياري σ = ٥ أوجد ل(١٨ < س < ٢١).

الحل

نوجد أولاً القيمة المعيارية المناظرة لكل من ١٨ ، ٢١ بالتعويض من العلاقة:

بوضع $س_1$ = ١٨ ⇐ $ق_1 = \frac{١٨ - ١٥}{٥} = ٠,٦$

$س_2$ = ٢١ ⇐ $ق_2 = \frac{٢١ - ١٥}{٥} = ١,٢$

∴ ل(١٨ < س < ٢١) = ل(٠,٦ < ق < ١,٢)

= ل(ق < ١,٢) − ل(ق < ٠,٦) باستخدام الجدول (١)

= ٠,٨٨٤٩ − ٠,٧٢٥٧ = ٠,١٥٩٢

مثال ٢

إذا علم أن س تمثل لدرجات الطلاب في مادة ما، وأن توزيع الدرجات في هذه المادة هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ = ٦٠، انحرافه المعياري σ = ١٦. أوجد:

١ ل(٦٠ < س < ٨٠)

٢ ل(٤٠ < س < ٧٦)

الحل

١ بوضع

$$س_١ = ٦٠ \longrightarrow ن_١ = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٦٠ - ٦٠}{١٦} = صفر$$

$$س_٢ = ٨٠ \longrightarrow ن_٢ = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٨٠ - ٦٠}{١٦} = ١,٢٥$$

ل(٦٠ < س < ٨٠) = ل(٠ < ن < ١,٢٥)

باستخدام الجدول (١)

= ٠,٨٩٤٤ − ٠,٥ = ٠,٣٩٤٤

أي أن حوالي ٣٩٪ من الطلاب درجاتهم تقع بين ٦٠، ٨٠ درجة

٢ بوضع

$$س_١ = ٤٠ \longrightarrow ن_١ = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٤٠ - ٦٠}{١٦} = -١,٢٥$$

$$س_٢ = ٧٦ \longrightarrow ن_٢ = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٧٦ - ٦٠}{١٦} = ١$$

ل(٤٠ < س < ٧٦) = ل(−١,٢٥ < ن < ١)

باستخدام الجدول (١)

= ٠,٨٤١٣ − ٠,١٠٥٦ = ٠,٧٣٥٧

أي أن حوالي ٧٤٪ من الطلاب تكون درجاتهم تقع بين ٤٠، ٧٦ درجة

مثال ٣

افترض أن الزمن س الذي يستغرقه أحد طلاب الصف الثاني عشر حتى يصل للمدرسة هو متغير عشوائي طبيعي متوسطة ١٦ دقيقة وانحرافه المعياري ٢ دقيقة احسب احتمال أنه في يوم ما يستغرق الطالب في قطع المسافة زمنا

١ أقل من ٢١ دقيقة؟

٢ أكبر من ١٢ وأقل من ٢١ دقيقة؟

الحل

١ بوضع

$$س_{١} = ٢١ \longrightarrow ن = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٢١ - ١٦}{٢} = ٢,٥$$

$\therefore$ ل(س < ٢١) = ل(ن < ٢,٥) باستخدام الجدول (١)

= ٠,٩٩٣٨

٢ بوضع

$$س_{١} = ١٢ \longrightarrow ن = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{١٢ - ١٦}{٢} = -٢$$

$\therefore$ ل(١٢ < س < ٢١) = ل(-٢ < ن < ٢,٥) باستخدام الجدول (١)

= ٠,٩٩٣٨ - ٠,٠٢٢٨

= ٠,٩٧١

تمارين ٣-٢

١ إذا علم أن درجات اختبار القدرات الأكاديمية في مادة الرياضيات التي تعقدها جامعة الكويت للطلاب المتقدمين للجامعة يتبع التوزيع المعتدل تقريباً بمتوسط ٦٩ وانحراف معياري ٤.
أوجد ما يلي:

١ احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من ٧٥.

٢ احتمال أن تكون درجة الطالب ما بين ٧٠، ٦٠.

٣ نسبة الطلاب الذين يحصلون على أقل من ٦٩ درجة.

٢ افترض أن المسافة بين البيت والمدرسة لأحد الطلاب هي متغير عشوائي طبيعي متوسطة ١٥ وتباينه ٩ احسب:

١ احتمال أن تكون المسافة أقل من ١٨

٢ احتمال أن تكون المسافة بين ١٢ ، ١٨

٣ إذا كان عدد ساعات العمل خلال شهر بشركة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٥٠ ساعة وانحراف معياري ٥٠ ساعة. ما هو احتمال أن تكون:

١ عدد ساعات العمل خلال الشهر أكثر من ٢٠٠ ساعة.

٢ عدد ساعات العمل خلال الشهر من ١٥٠ إلى ١٧٥ ساعة.

٣ عدد ساعات العمل خلال الشهر أقل من ٥٠ ساعة.

تمارين عامة ٣-٣

١ إذا كان المتغير العشوائي س~ يتبع التوزيع الطبيعي ط (٥٠، ٢٥). أوجد كلاً من الاحتمالات التالية:

أ ل(٤٥ < س~ < ٥٥)

ب ل(٤٠,٥ < س~ < ٦٠,٥)

٢ إذا كان المتغير العشوائي س~ يتبع التوزيع الطبيعي ط (١٢٠ ، ٤٩). أوجد كلا من الاحتمالات التالية:

أ ل(١٠٧ < س~ < ١١١)

ب ل(س~ > ١١٣)

٣ يفرض أن أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠ مولود تتبع التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2) حيث μ = ٥٥ سم ، σ = ٥سم. أوجد العدد المتوقع للمواليد الذين أطوالهم:

أ بين ٥٠ سم، ٦٦,٤ سم

ب أكبر من أو تساوي ٥٧,٢ سم

٤ يفرض أن درجات الحرارة خلال شهر مارس في مدينة ما تتبع التوزيع الطبيعي ط (٢٠، ٩). أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة بين ٢٦ و ١٢ درجة مئوية خلال هذا الشهر.

٥ إذا كان المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2)
أوجد: ل(μ − ٢σ < س~ < μ + ٢σ)

قائمة بالمفردات الرياضية

باللغة العربية	باللغة الإنجليزية
توزيع	Distribution
توزيع ذي الحدين	Binomial Distribution
التوزيع الطبيعي	Normal Distribution
توزيع الطبيعي المعياري	Standard Normal Distribution

جدول المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

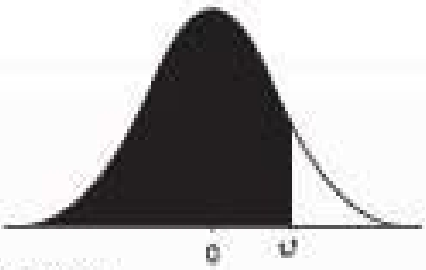


Table1: Areas under the normal curve.

x أو ن	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247

تابع/ جدول المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

z أو ب	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

الاحتمالات في توزيع ذي الحدين: د(س)

		ل										
ن	س	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	.0490	.0640	.0810	.0902
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3		0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.062	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001			
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.312	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.210	0.478	0.698
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001				
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001			
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001		
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009		
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005	
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005
	6			0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7				0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
	8					0.001	0.004	0.017	0.058	0.168	0.430	0.663

all values omitted in this table are 0.0005 or less.

تابع/ الاحتمالات في توزيع ذي الحدين : د(س)

		ل										
ن	س	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002					
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004				
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004			
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003		
	4	0.001	0.007	0.066	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001	
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001					
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002				
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001			
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001		
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006		
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
	7			0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8				0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9					0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
	10						0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.098	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.010	0.064	0.168	0.283	0.230	0.098
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
	12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540

تابع/ الاحتمالات في توزيع ذي الحدين : د(س)

		ل										
ن	س	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	0	.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.006	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.021
	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.0009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
	14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.219	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
	15								0.005	0.035	0.206	0.463

المراجع

المرجع	المصدر	المؤلفون
Probability and Statistics	Sixth Edition Prentice Hall of India	Richard A. Johanson
Statistics and Econometrics	Sch Aum's out lines	Dominick Salvaiore
Math (5)	McGraw - Hill	
Math Course 1	Holt Rinehart Winston	
التحليل الإحصائي للظواهر العشوائية		د. حسني إبراهيم حمدي
الرياضيات والإحصاء	دار ماكجروهيل للنشر	جوردن بانكروفت جورج أوسيلفان
Statistics	John Wiley & Sons Inc	Prems Mann
الإحصاء في البحوث العلمية	المكتبة الأكاديمية	أ. د. محمد أبو يوسف أستاذ الإحصاء جامعة عين شمس
الإحصاء والاحتمالات في التطبيقات الهندسية	دار الفجر للنشر والتوزيع	د. أمجد إبراهيم شحادة د. علي إبراهيم سعد أ. محمد رياض علي
الإحصاء والاحتمال	شوم (أكاديميا)	ترجمة عبدالقادر حمدو المؤلف مواري سبيغل

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم ١٤٠ بتاريخ ٢٠٠٨/٦/١٨

الشركة المصرية للطباعة
EGYPTIAN PRINTING CO.