وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الأولى
١٤٣٥ - ١٤٣٦ هـ
٢٠١٤ - ٢٠١٥ م

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $F'(x) = 5(3x+2)^4 \times 3 = 15(3x+2)^4 = f(x)$

إذاً F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(2) $F'(x) = x^2 - 2x + 1 = f(x)$

إذاً F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(3) $F'(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} = f(x)$

إذاً F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx = \frac{x^6}{6} - 3x^2 + 3x + C$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx = 3x - 2x^3 + C$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = x^{\frac{1}{3}} + C$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^3 - x^{-3})dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{2} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} + C$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx = \int \frac{x^3 - 27}{x - 3}dx = \int (x^2 + 3x + 9)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 9x + C$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx = \int (2x^2 - x - 6)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 6x + C$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx = \int (\sqrt{x}-1)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$

(11) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = x - 2\sqrt{x} + C$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx + \int 2\sqrt{x}\,dx = 10\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$

(13) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$

(15) $F(x) = x^3 - 5x + C$

$F(2) = 3 \quad \therefore \quad C = 5 \quad \therefore \quad F(x) = x^3 - 5x + 5$

(16) $F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + C$

$F(-1) = 0 \quad \therefore \quad C = 10 \quad \therefore \quad F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 10$

(17) $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + C$

$r(0) = 0 \quad \therefore \quad r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$

(18) ليكن s ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض عند الزمن t. نفرض أن s دالة في t قابلة للاشتقاق مرتين، ونرمز إلى سرعة القذيفة بالرمز v وإلى عجلتها بالرمز a : $v = \frac{ds}{dt}$ ، $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

(a) $a = -9.8$

$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow -9.8 = \frac{dv}{dt}$

$v_{(t)} = -\int 9.8\, dt = -9.8t + C_1$

$16 = -9.8(0) + C_1$

$v(t) = -9.8t + 16$

عندما تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع، تكون $v(t) = 0$، أي أن:

$-9.8t + 16 = 0 \quad \therefore \quad t = 1.63s$

(b) $s(t) = \int v(t)dt = \int(-9.8t + 16)dt = -4.9t^2 + 16t + C_2$

$s(0) = 115 \quad \therefore \quad C_2 = 115$

$s(t) = -4.9t^2 + 16t + 115$

عندما تصل الكرة إلى الأرض يكون ارتفاعها $s(t) = 0$، أي أن:

$-4.9t^2 + 16t + 115 = 0 \quad \therefore \quad t = 6.74\, s$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (a)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (a)	**(11)** (b)	**(12)** (d)

التكامل بالتعويض — تمرين 2–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $u = x^2 - 3x + 5 \quad , \quad du = (2x-3)dx$

$$\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2-3x+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

(2) $u = 4x - 5 \quad , \quad du = 4dx$

$$\int (4x-5)^8 dx = \int \frac{1}{4}u^8 du = \frac{u^9}{36} + C = \frac{(4x-5)^9}{36} + C$$

(3) $u = x^2 + 4x - 1 \quad , \quad du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(4) $u = x^3 - 3x + 5 \quad , \quad du = (3x^2 - 3)dx = 3(x^2 - 1)dx$

$$\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 5}\,dx = \int \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

(5) $u = x^3 - 3x^2 + 4 \quad , \quad du = (3x^2 - 6x)dx = 3(x^2 - 2x)dx$

$$\int (x^2 - 2x)(x^3 - 3x^2 + 4)^5 dx = \int \frac{1}{3}u^5 du = \frac{u^6}{18} + C = \frac{(x^3 - 3x^2 + 4)^6}{18} + C$$

(6) $u = 4 + x^3 \quad , \quad du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4 + x^3}}dx = \int x^2(4 + x^3)^{-\frac{1}{3}}dx = \int \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{(4 + x^3)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

(7) $u = 2 - 3x \quad , \quad du = -3dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 3x}} = \int (2 - 3x)^{-\frac{1}{3}}dx = \int -\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = -\frac{(2 - 3x)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

(8) $u = 3x + 2 \quad , \quad du = 3dx \quad , \quad x = \frac{u}{3} - \frac{2}{3}$

$$\int x(3x + 2)^6 dx = \int \left(\frac{u}{3} - \frac{2}{3}\right)u^6 \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^8}{24} - \frac{2u^7}{21}\right] + C$$

$$= \frac{u^8}{72} - \frac{2u^7}{63} + C = \frac{(3x + 2)^8}{72} - \frac{2(3x + 2)^7}{63} + C$$

(9) $u = 1 + 3x \quad , \quad du = 3dx \quad , \quad x = \frac{u}{3} - \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + 3x}}dx = \int x(1 + 3x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int \left(\frac{u}{3} - \frac{1}{3}\right)u^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{27}(1 + 3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

(10) $u = x - 1 \quad , \quad du = dx \quad , \quad x^2 = (u + 1)^2$

$$\int x^2\sqrt{x - 1}\,dx = \int (u + 1)^2 \times u^{\frac{1}{2}} \times du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}(x - 1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(11) $u = x^2 - 2 \quad , \quad du = 2x\,dx \quad , \quad x^2 = u + 2$

$$\int x^2 \bullet x\sqrt{x^2 - 2}\,dx = \frac{1}{2}\int (u + 2)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du + \int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{5}(x^2 - 2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(12) $u = x^3 + 1 \quad , \quad du = 3x^2 dx \quad , \quad x^3 = u - 1$

$$\int x^3 \bullet x^2(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{3}\int (u - 1) \times u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}}du - \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{1}{7}(x^3 + 1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3 + 1)^{\frac{4}{3}} + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (a)

(5) (a) **(6)** (a) **(7)** (b) **(8)** (d)

(9) (b) **(10)** (a) **(11)** (c) **(12)** (b)

تكامل الدوال المثلثية تمرَّنْ 3–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x)dx = \sec x - \cos x + C$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)dx = -\int -\csc x \cot x \, dx + \int \sec^2 x \, dx = -\csc x + \tan x + C$

(3) $\int \left(-\frac{1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx = \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + C$

(4) $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

(5) $\int \cos^5 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3+1)dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + C$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \sin x(\cos x)^{-3}dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$

(8) $\int \sec^3 x \tan x \, dx = \int \sin x \times (\cos x)^{-4}dx = -\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

(9) $\int \csc^3 x \cot x \, dx = \int \cos x \times (\sin x)^{-4}dx = \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$

(10) $\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x \, dx = -\int \sqrt{\cot x}(-\csc^2 x)dx = -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} x + C$

(11) $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x \, dx = \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x}\cos x \, dx = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

(13) $\int \frac{1}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}dx = -\int \frac{-1}{\sin^2 x}(1+\cot x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2\sqrt{1+\cot x} + C$

(14) $\int \frac{1}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{1+\tan x} + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (c)	**(7)** (d)	**(8)** (b)
(9) (c)	**(10)** (c)	**(11)** (b)	**(12)** (b)

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية — تمرَّنْ 4–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{dy}{dx} = (\ln 7) \times 7^x$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 5}{2\sqrt{x+1}} \times 5^{\sqrt{x+1}}$

(3) $\frac{dy}{dx} = (\ln 8)(\sec^2 x) \times 8^{\tan x}$

(4) $\frac{dy}{dx} = 2e^x$

(5) $\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$

(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} e^{\frac{x}{5}}$

(7) $\frac{dy}{dx} = (2x-1)e^{x^2-x+1}$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}+3}$

(9) $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x \bullet e^{\csc x}$

(10) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 e^{x^4-5}$

(11) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$

(12) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

(15) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$

(16) $\frac{e^{0.1x}}{0.1} + C = 10e^{0.1x} + C$

(17) $-e^{\frac{1}{x}}+C$

(18) $e^{x^2+x+4}+C$

(19) $\frac{1}{3}e^{x^3-6x}+C$

(20) $\frac{1}{0.5}e^{0.5x}+0.5\ln|x|+C$

(21) $\ln(e^x+1)+C$

(22) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$

(23) $\frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2|+C$

(24) $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C$

(25) $\frac{2}{3}\ln|3x+1|+C$

(26) $-2\ln|\cos x|+\cot x+C$

(27) $\ln|\sin x|+\frac{x^3}{3}+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (a)
(5) (b)	(6) (b)	(7) (c)	(8) (a)
(9) (b)	(10) (d)	(11) (c)	(12) (b)
(13) (a)	(14) (b)		

التكامل بالتجزيء تمرَّنْ 5–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $u=x \qquad dv=\cos(3x)\,dx$

$du=dx \qquad v=\frac{\sin(3x)}{3}$

$$\int x\cos(3x)\,dx=\frac{x}{3}\sin(3x)-\frac{1}{3}\int\sin(3x)\,dx$$

$$=\frac{x}{3}\sin(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+C$$

(2) $u=x \qquad dv=\sin(5x)\,dx$

$du=dx \qquad v=-\frac{1}{5}\cos(5x)$

$$\int x\sin(5x)\,dx=-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{5}\int\cos(5x)\,dx$$

$$=-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{25}\sin(5x)+C$$

(3) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = e^{x-3}dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int x\,e^{x-3}\,dx = x\,e^{x-3} - \int e^{x-3}dx = x\,e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}dx = (x-6)e^{x-5} + C$ (إرشاد: $u = x-5 \quad , \quad dv = e^{x-5}dx$)

(5) $u = \ln\sqrt[4]{x} = \ln x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln x \qquad du = \frac{1}{4x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx = \frac{x}{4}\ln x - \int \frac{1}{4x}\times x\,dx = \frac{1}{4}(x\ln x - x) + C$$

(6) $u = \ln(2x-1) \qquad du = \frac{2}{2x-1}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln(2x-1)dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx$$

$$= x\ln(2x-1) - \int\left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= x\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)dx = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$ (إرشاد: $u = \ln(x+1) \quad , \quad dv = (2x+1)dx$)

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x^2}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2}\ln x\,dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

(9) $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^{-\frac{1}{3}}dx \qquad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$\int x^{-\frac{1}{3}}\ln x\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \int \frac{1}{x}\times\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C$$

(10) $u = \ln x^2 = 2\ln x \qquad du = \frac{2}{x}dx$

$dv = x^2dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2\ln x^2dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{3}\int\frac{1}{x}\times x^3dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C$$

(11) $u = x^2 - 2x \qquad du = 2(x-1)dx$

$dv = \cos x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x^2-2x)\cos x\,dx = (x^2-2x)\sin x - 2\int (x-1)\sin x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (x-1)\sin x\,dx$

$u = x-1 \qquad du = dx$

$dv = \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$

$$\int (x^2-2x)\cos x\,dx = (x^2-2x)\sin x - 2\left[-(x-1)\cos x + \int \cos x\,dx\right]$$

$$= (x^2-2x-2)\sin x + 2(x-1)\cos x + C$$

(12) $u = x^2+3x \qquad du = (2x+3)dx$

$dv = \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$

$$\int (x^2+3x)\sin x\,dx = -(x^2+3x)\cos x + \int (2x+3)\cos x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (2x+3)\cos x\,dx$

$u = 2x+3 \qquad du = 2dx$

$dv = \cos x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x^2+3x)\sin x\,dx = -(x^2+3x)\cos x + (2x+3)\sin x - 2\int \sin x\,dx$$

$$= -(x^2+3x-2)\cos x + (2x+3)\sin x + C$$

(13) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{x+1}\,dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int x^2 e^{x+1}\,dx = x^2 e^{x+1} - \int 2x\,e^{x+1}\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\,e^{x+1}\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{x+1}\,dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int x^2 e^{x+1}\,dx = x^2 e^{x+1} - 2x\,e^{x+1} + 2\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1}(x^2-2x+2) + C$$

(14) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x-3}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int x^2 e^{2x-3}\,dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \int x\,e^{2x-3}\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\,e^{2x-3}\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x-3}dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$\int x^2 e^{2x-3}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \left[\frac{x}{2}e^{2x-3} - \int \frac{1}{2}e^{2x-3}dx\right]$

$= \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \frac{x}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + C = e^{2x-3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$

(15) $u = (\ln(x))^2 \qquad du = 2\frac{\ln(x)}{x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int (\ln(x))^2\, dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln x\, dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2\left[x\ln x - \int dx\right] = x(\ln(x))^2 - 2x\ln x + 2x + C$

(16) $u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = \cos x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos x\, e^{2x}dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية فنحصل على:

$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\, dx\right]$

$= \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\, dx$

$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\, e^{2x} \Longrightarrow \int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$

(17) $u = \sin x(\ln x) \qquad du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \cos(\ln x)dx$

$u = \cos(\ln x) \qquad du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x)] + \int x \bullet \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$

$\Longrightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)
(5) (a)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (b)	**(10)** (b)	**(11)** (c)	

التكامل باستخدام الكسور الجزئية — تمرَّنْ 6–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f(x) = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$

$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 5 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$\therefore \ f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$

$\int f(x)\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-3| + C$

(2) $x^2 + 2x = x(x+2)$

$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+2)}$

$1 = A_1(x+2) + A_2 x$

عوّض عن x بـ -2 $\quad \therefore \quad A_2 = -\frac{1}{2}$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore \ f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

(3) $x^2 + x + 12 = (x-3)(x+4)$

$f(x) = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+4}$

$-x + 10 = A_1(x+4) + A_2(x-3)$

عوّض عن x بـ -4 $\quad \therefore \quad A_2 = -2$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x+4}$

$\int f(x)\,dx=\ln|x-3|-2\ln|x+4|+C$

(4) $f(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+3}$

$12=A_1(x-1)(x+3)+A_2(x)(x+3)+A_3(x)(x-1)$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1=-4$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2=3$

عوّض عن x بـ -3 $\therefore$ $A_3=1$

$f(x)=\frac{-4}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+3}$

$\int f(x)\,dx=-4\ln|x|+3\ln|x-1|+\ln|x+3|+C$

(5) $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$

$\frac{x+17}{(2x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{2x-1}+\frac{A_2}{x+3}$

$x+17=A_1(x+3)+A_2(2x-1)$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$ $\therefore$ $A_1=5$

عوّض عن x بـ -3 $\therefore$ $A_2=-2$

$\int\frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx=\int\left(\frac{5}{2x-1}-\frac{2}{x+3}\right)dx$

$=\frac{5}{2}\ln|2x-1|-2\ln|x+3|+C$

(6) $x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$

$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-3)}+\frac{A_3}{(x-3)^2}$

$\therefore\ -6x+25=A_1(x-3)^2+A_2x(x-3)+A_3x$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_3=\frac{7}{3}$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1=\frac{25}{9}$

عوّض في المعادلة عن $A_1=\frac{25}{9}$ و $A_3=\frac{7}{3}$ ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_2.

$\therefore\ A_2=-\frac{25}{9}$

$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}=\frac{25}{9x}-\frac{25}{9(x-3)}+\frac{7}{3(x-3)^2}$

$\int\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx=\frac{25}{9}\ln|x|-\frac{25}{9}\ln|x-3|-\frac{7}{3}\times\frac{1}{(x-3)}+C$

(7) $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-3}$$

$$\therefore\ 3x^2 - 4x + 3 = A_1 x(x-3) + A_2(x-3) + A_3 x^2$$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_3 = 2$

عوّض في المعادلة عن $A_2 = -1$ و $A_3 = 2$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-3}$$

$$\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + C$$

(8) $\dfrac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \dfrac{9x-7}{(x-3)^2}$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x - 7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore\ A_1 = 9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

(9) $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \dfrac{x+5}{x^2-1}$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x + 5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

(10) $\frac{x^3-2}{x^2+x} = x-1+\frac{x-2}{x^2+x}$

$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1}$

$x-2 = A_1(x+1) + A_2 x$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = -2$

عوّض عن x بـ -1 $\quad \therefore \quad A_2 = 3$

$\frac{x^3-2}{x^2+x} = x-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}$

$\int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$

(11) $\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$

$2x-1 = A_1(x-1) + A_2$

عوّض عن x بـ 1 $\quad \therefore \quad A_2 = 1$

عوّض عن A_2 بـ 1 ولتكن $x = 0$ $\quad \therefore \quad A_1 = 2$

$\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}dx = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$

(12) **(a)** $f(x) = \frac{(x-2)(2x^3-x^2-9x+14)}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x^3-x^2-9x+14}{x^2-4}$

$= 2x-1+\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)}$

(b) $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2}$

(c) $f(x) = 2x-1+\frac{2}{x-2}+\frac{-3}{x+2}$

$\int f(x)\,dx = x^2 - x + 2\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (d)	**(6)** (c)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2-12x)dx=[x^3-6x^2]_{-1}^{1}=2$

(2) $\int_{0}^{2}(x^2+2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^2=\frac{26}{3}$

(3) $\int_{0}^{4}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx=\int_0^4(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^4=4$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}[\sin\pi-\sin 0]=0$

(5) $\int_{1}^{4}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(-\frac{4}{x}\right)_1^4-\left(\frac{x^3}{6}\right)_1^4=-\frac{15}{2}$

(6) $\int_{0}^{1}x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{5}$

(7) $[3e^x+5\ln|x|]_1^2=3(e^2-e)+5\ln 2$

(8) $\int_{-1}^{2}(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=5$

(9) $\int_{-1}^{0}-x^3dx+\int_0^1 x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$

(10) $\int_{-2}^{0}(-x^2+3)dx+\int_0^3(x^2+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^3=\frac{64}{3}$

(11) $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$

$x_1=-4\quad,\quad x_2=2$

x		-4		2	
x^2+2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore\ x^2+2x-8\leqslant 0\ \ \therefore\ \forall x\in[-4,2]$

$\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)dx\leqslant 0$

(12) $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)=x(x+1)(x-6)$

	-1		0		6	
$-$		$+$		$-$		$+$

$x^3-5x^2-6x\geqslant 0\qquad\forall x\in[-1,0]$

$\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx\geqslant 0$

(13) $f(x) = x^2 - 3x + 7$

$g(x) = 4x - 5$

$f(x) - g(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

x	0	1	3		4	
$f(x)-g(x)$	+		0	−	0	+

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0,1]$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx \geqslant 0 \Longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 g(x)dx$

$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geqslant \int_0^1 (4x-5)dx$

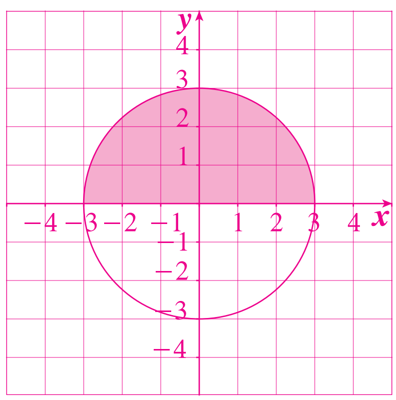
(14) $y = \sqrt{9 - x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y = \sqrt{9 - x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi$



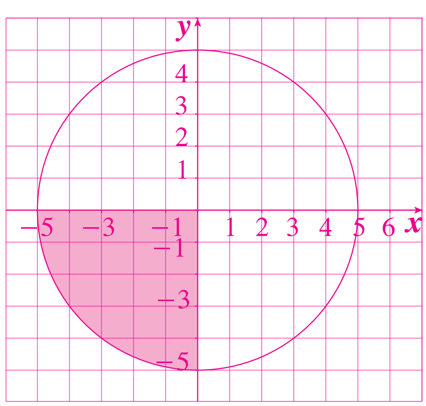
(15) $y = -\sqrt{25 - x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25 - x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$



(16) $u = 1 + x \quad , \quad du = dx$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_1^4 \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}\Big]_1^4 = \frac{3}{4}$$

(17) $u = \ln x \quad , \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$x = e \quad , \quad u = 1$

$x = 6 \quad , \quad u = \ln 6$

$$\int_1^{\ln 6} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_1^{\ln 6} = \ln(\ln 6)$$

(18) $u = \ln x \quad , \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x} dx = \int_0^1 u^6 du = \left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(19) $u = x^2 + 1 \quad , \quad du = 2xdx$

$x = -1 \implies u = 2 \quad , \quad x = 3 \implies u = 10$

$$\int_{-1}^3 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_2^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\ln|u|]_2^{10} = \frac{1}{2}\ln 5$$

(20) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \sin x\, dx \quad , \quad v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx = -x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(21) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \cos 3x\, dx \quad , \quad v = \dfrac{1}{3}\sin 3x$

$$\int_0^{\pi} x\cos 3x\, dx = \frac{x}{3}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin 3x\, dx = \left[\frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{9}$$

(22) $u = \ln x \qquad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = x^3 \quad , \quad v = \dfrac{x^4}{4}$

$$\int_1^3 x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4}{4}\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{4} dx = \frac{81}{4}\ln 3 - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^3 = \frac{81}{4}\ln 3 - 5$$

(23) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx$

$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{1}{2}[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\, dx$$

نطبق القاعدة مرّة ثانية على التكامل المحدد:

$u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

فيكون:

$du = \cos x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5}$$

(24) $\frac{4}{x^2-4} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+2)}$

$4 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$

عوّض عن x بـ -2 $\quad \therefore \quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 2 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}dx = [\ln|x-2| - \ln|x+2|]_{-1}^{1} = -2\ln 3$$

(25) $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+3}$

$5x - 1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_2 = 4$

عوّض عن x بـ 1 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+3}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}dx = [\ln|x-1| + 4\ln|x+3|]_{-2}^{0} = 3\ln 3$$

(26)
$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x^2 \\ \hline & -\underline{\;x^2+2x+1\;} \\ & -2x-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2}$$

$-2x - 1 = A_1(x+1) + A_2$

عوّض عن x بـ -1 ، $A_2 = +1$

عوّض عن x بـ 0 مع قيمة A_2 نجد $A_1 = -2$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx = \int_1^3\left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \left[x - 2\ln|x+1| \frac{-1}{x+1}\right]_1^3 = \frac{9}{4} - 2\ln 2$$

حل آخر

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx$$

$$u = x+1 \Longrightarrow du = dx$$

$$x = u-1$$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx = \int_2^4 \frac{(u-1)^2}{u^2}du$$

$$= \int_2^4 \frac{(u^2-2u+1)}{u^2}du$$

$$= \int_2^4 \left(1-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= \left[u - 2\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_2^4$$

$$= \left(4-2\ln 4-\frac{1}{4}\right)-\left(2-2\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{4}-2\ln 2$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (a)	**(11)** (b)	**(12)** (d)
(13) (d)	**(14)** (b)	**(15)** (c)	

اختبار الوحدة الخامسة

(1) $F'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x^2+6x+5)^{\frac{1}{2}}(4x+6) = (2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5} = f(x)$

(2) $F(x) = x^3 - x^2 + C$

$F(2) = 6 \quad ; \quad C = 2$

$F(x) = x^3 - x^2 + 2$

(3) $\frac{1}{2}\int (2x+4)(x^2+4x+7)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x^2+4x+7)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

(4) $\int (2x-1)(x^2-x+7)^{-5}dx = \frac{(x^2-x+7)^{-4}}{-4}+C = \frac{-1}{4(x^2-x+7)^4}+C$

(5) $u = x-3 \;,\; x^2 = (u+3)^2 \;,\; du = dx$

$$\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx = \int (u+3)^2\cdot u^{\frac{1}{3}}du = \int \left(u^{\frac{5}{3}}+6u^{\frac{4}{3}}+9u^{\frac{1}{3}}\right)du$$

$$= \frac{3u^{\frac{8}{3}}}{8}+\frac{18u^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{27}{4}u^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3(x-3)^{\frac{8}{3}}}{8}+\frac{18(x-3)^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{27}{4}(x-3)^{\frac{4}{3}}+C$$

(6) $u = x^2 - 8 \quad , \quad x^2 = u + 8 \quad , \quad du = 2xdx \implies xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-8}\,(x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+8)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 8u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2-8)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)}dx$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + x\right)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

(8) $\int \cos x(\sin x)^{-3}dx = \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$

(9) $-\int -\sin x(\cos x)^{\frac{2}{3}}dx = -\frac{3\cos x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(10) $\int \sec^7 x\tan x\,dx = \int \sec^6 x(\tan x \cdot \sec x\,dx)$

$u = \sec x \quad , \quad du = \tan x \sec x\,dx$

$$\int \sec^6 x(\tan x\sec x\,dx) = \int u^6 du = \frac{\sec^7 x}{7} + C$$

(11) $\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

(12) $2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + C$

(13) $\frac{1}{3}\int \frac{3x^2-12}{x^3-6x^2+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-6x^2+1| + C$

(14) $\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+2x}{e^{2x}+x^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+x^2+3| + C$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 4\int \cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 4\sin x + C_1$

في التكامل: $\int x^2\cos x\,dx$

نأخذ:

$u = x^2 \qquad\qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad\qquad v = \sin x$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية لنجد $\int x\sin x\,dx$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_2$$

$$\int (x^2-4)\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 6\sin x + C$$

(16) $u = \ln(3x+2) \implies du = \dfrac{3}{3x+2}dx$

$dv = dx \implies v = x$

$$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x+2-2}{3x+2}\,dx$$

$$= x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

(17) $u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}dx$

$du = 3dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot 3x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}dx$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)e^{2x+1} + C$$

(18) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x-1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

$$\int x^2 e^{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-1} - \int x\,e^{2x-1}dx$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x-1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

$$\int x^2 e^{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-1} - \frac{x}{2}e^{2x-1} + \int \frac{1}{2}e^{2x-1}dx = e^{2x-1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

(19) $\dfrac{x^2-3x-28+28}{x^2-3x-28} = 1 + \dfrac{28}{x^2-3x-28}$

$x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$

$$\frac{28}{x^2-3x-28} = \frac{A_1}{x-7} + \frac{A_2}{x+4}$$

$28 = A_1(x+4) + A_2(x-7)$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2 = -\dfrac{28}{11}$

عوّض عن x بـ 7 $\therefore$ $A_1 = \dfrac{28}{11}$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-3x-28} = 1 + \frac{28}{11(x-7)} - \frac{28}{11(x+4)}$$

$$\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}dx = x + \frac{28}{11}\ln|x-7| - \frac{28}{11}\ln|x+4| + C$$

(20) $\dfrac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}=\dfrac{x(x^3+2x+6)}{x(x^2+4x+4)}=\dfrac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}$

$\dfrac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}=x-4+\dfrac{14x+22}{(x+2)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\dfrac{14x+22}{(x+2)^2}=\dfrac{A_1}{x+2}+\dfrac{A_2}{(x+2)^2}$

$14x+22=A_1(x+2)+A_2$

عوّض عن x بـ -2 نحصل على $A_2=-6$

نضع $A_2=-6$ ونأخذ $x=0$ نحصل على $A_1=14$

$$\int\dfrac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx=\dfrac{x^2}{2}-4x+14\ln|x+2|+\dfrac{6}{x+2}+C$$

(21) $[\ln|x|]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

(22) $-\int_{-1}^{1}-2x\sin(1-x^2)dx=[\cos(1-x^2)]_{-1}^{1}=0$

(23) $\int_0^{\frac{5}{2}}(-2x+5)dx+\int_{\frac{5}{2}}^{5}(2x-5)dx=[-x^2+5x]_0^{\frac{5}{2}}+[x^2-5x]_{\frac{5}{2}}^{5}=\dfrac{25}{2}$

(24) $y=-\sqrt{36-x^2}\quad\therefore\quad y^2=36-x^2\quad\therefore\quad y^2+x^2=36$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 6 وحدات.

والدالة $y=-\sqrt{36-x^2}$ تمثل النصف السفلي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظلّلة تساوي:

$\int_{-6}^{0}-\sqrt{36-x^2}\,dx$

$=\dfrac{1}{4}\pi(6)^2=9\pi\text{ units}^2$

(25) $\dfrac{x^2-3}{x^2-3x+2}=1+\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}=\dfrac{A_1}{(x-2)}+\dfrac{A_2}{(x-1)}$

$3x-5=A_1(x-1)+A_2(x-2)$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2=2$

عوّض عن x بـ 2 $\therefore$ $A_1=1$

$\dfrac{x^2-3}{x^2-3x+2}=1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-1}$

$\int\dfrac{x^2-3}{x^2-3x+2}dx=[x+\ln|x-2|+2\ln|x-1|]_3^5=2+\ln 3+2\ln 2$

(26) $\dfrac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}=1+\dfrac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\dfrac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x+3}+\dfrac{A_3}{(x+3)^2}$

$-8x^2-9x+2=A_1(x+3)^2+A_2x(x+3)+A_3x$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = \frac{2}{9}$

عوّض عن x بـ -3 $\therefore$ $A_3 = \frac{43}{3}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{2}{9}$ وعن A_3 بـ $\frac{43}{3}$ ولتكن $x = 1$ $\therefore$ $A_2 = -\frac{74}{9}$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x} = 1 + \frac{2}{9x} - \frac{74}{9(x+3)} + \frac{43}{3(x+3)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x}\, dx = \left[x + \frac{2}{9}\ln|x| - \frac{74}{9}\ln|x+3| - \frac{43}{3(x+3)}\right]_1^3$$

$$= 2 + \frac{2}{9}\ln 3 + \frac{43}{36} - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

$$= \frac{115}{36} + \frac{2}{9}\ln 3 - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

(27) $-x^2 + 7x + 8 = (x+1)(-x+8)$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & & & 2 & & 5 & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ x & & -1 & & & & 8 & \\ \hline -x^2+7x+8 & - & 0 & & + & & 0 & - \end{array}$$

$-x^2 + 7x + 8 \geqslant 0 \qquad \forall x \in [2, 5]$

$\therefore \int_2^5 (-x^2 + 7x + 8)dx \geqslant 0$

(28) $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -5 & & -2 & \\ \hline x^2+7x+10 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$x^2 + 7x + 10 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-4, -2]$

$\therefore \int_{-4}^{-2} (x^2 + 7x + 10)dx \leqslant 0$

(29) $f(x) = x^2 + 13x + 9$

$g(x) = 5x - 6$

$f(x) - g(x) = x^2 + 8x + 15$

$f(x) - g(x) = (x+3)(x+5)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & -4 & & \\ & & & \downarrow & & \\ x & & -5 & & -3 & \\ \hline f(x)-g(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

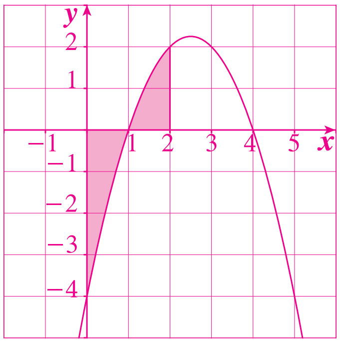
$f(x) - g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-5, -4]$

$\therefore \int_{-5}^{-4} (f(x) - g(x))\, dx \leqslant 0 \implies \int_{-5}^{-4} f(x)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} g(x)dx$

$\implies \int_{-5}^{-4} (x^2 + 13x + 9)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} (5x - 6)dx$

تمارين إثرائية

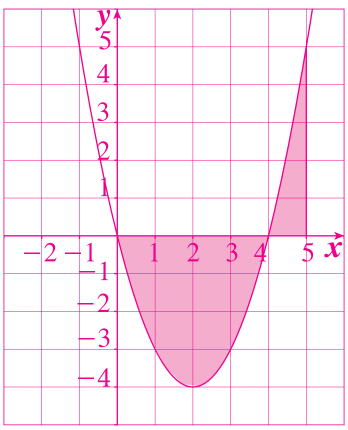
(1) (a) $\int_0^2 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$



(b) $A = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)dx + \int_1^2 (-x^2 + 5x - 4)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^2 = 3$ units square

(2) (a) $\int_0^5 (x^2 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^5 = -\frac{25}{3}$



(b) $A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx + \int_4^5 (x^2 - 4x)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^5 = 13$ units square

(3) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^2\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

(4) $\int \cos\theta \cdot (\sin\theta)^{-2}\,d\theta = -\frac{1}{\sin\theta} + C$

(5) $\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + C_1$

$y'(0) = 4 \quad \therefore \quad C_1 = 4$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + 4$

$$y = x^2 - x^3 + 4x + C_2$$

$$y(0) = 1 \quad \therefore \quad C_2 = 1$$

$$y = x^2 - x^3 + 4x + 1$$

(6) $C(x) = \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} + C_1$

$C(x) =$ التكلفة

$x =$ عدد النسخات

$$\therefore \quad C = (25) = 50 \Longrightarrow 50 = 4\sqrt{25} + C_1 \Longrightarrow C_1 = 30$$

$$C(x) = 4\sqrt{x} + 30$$

$$C(2\,500) = 4\sqrt{2\,500} + 30 = 230$$

التكلفة: 230 دينارًا

(7) $u = x^3 \qquad du = 3x^2 dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية

$u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثالثة

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\, e^x - 6\int e^x dx$$

$$= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln x\, dx \frac{x^4}{4} \bullet \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

(9) **(a)** $2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1)$

$$\frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{A_1}{2x-3} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$x - 2 = A_1(x-1) + A_2(2x-3)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore \quad A_2 = 1$

عوّض عن x بـ $\frac{3}{2}$ $\therefore \quad A_1 = -1$

$$\frac{x-2}{2x^2-5x+3} = \frac{-1}{2x-3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{x-2}{2x^2-5x+3}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|2x-3| + \ln|x-1| + C$$

(b) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$$\frac{x^2-9}{(2x+1)(x^2+10x+25)} = \frac{A_1}{2x+1} + \frac{A_2}{x+5} + \frac{A_3}{(x+5)^2}$$

$$x^2 - 9 = A_1(x+5)^2 + A_2(2x+1)(x+5) + A_3(2x+1)$$

عوّض عن x بـ -5 $\therefore$ $A_3 = -\frac{16}{9}$

عوّض عن x بـ $-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $A_1 = -\frac{35}{81}$

عوّض عن A_3 بـ $-\frac{16}{9}$ و A_2 بـ $-\frac{35}{81}$ ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_2 = \frac{58}{81}$

$$\frac{x^2-9}{(2x+1)(x+5)^2} = \frac{-35}{81(2x+1)} + \frac{58}{81(x+5)} - \frac{16}{9(x+5)^2}$$

$$\int \frac{x^2-9}{(2x+1)(x+5)^2}\, dx = \frac{-35}{162}\ln|2x+1| + \frac{58}{81}\ln|x-5| + \frac{16}{9(x+5)} + C$$

(c) $\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)} = x - 4 + \frac{30x^2-50x+17}{(x-1)^2(x+6)}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$\frac{30x^2-50x+17}{(x+6)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+6} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$30x^2 - 50x + 17 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+6) + A_3(x+6)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_3 = -\frac{3}{7}$

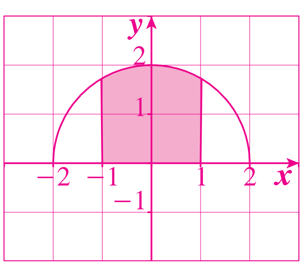
عوّض عن x بـ -6 $\therefore$ $A_1 = \frac{1397}{49}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1397}{49}$ و A_2 بـ $-\frac{3}{7}$ ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_2 = \frac{73}{49}$

$$\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)} = x - 4 + \frac{1397}{49(x+6)} + \frac{73}{49(x-1)} - \frac{3}{7(x-1)^2}$$

$$\int \frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}\, dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1397}{49}\ln|x+6| + \frac{73}{49}\ln|x-1| + \frac{3}{7(x-1)} + C$$

(10)



لايجاد التكامل المحدد: $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx$

نفترض: $x = 2\cos\theta \Longrightarrow dx = -2\sin\theta\, d\theta$

عند $x=-1$ تكون $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ؛ عند $x=1$ تكون $\theta=\frac{\pi}{3}$

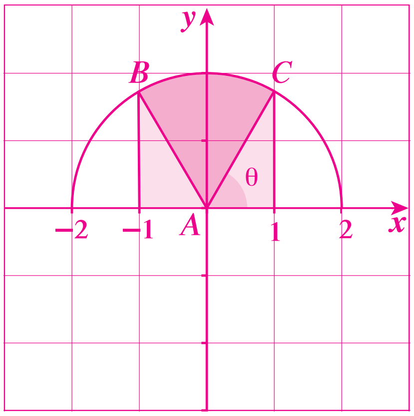
لذا:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sqrt{4-4\cos^2\theta}\right)(2\sin\theta\,d\theta)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}4\sin^2\theta\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$$

حل آخر

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$



قياس زاوية القطاع الدائري (ABC) هو أيضًا $\frac{\pi}{3}$

فتكون مساحته تساوي $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}(2)^2$

أي أن مساحة $(ABC)=\frac{2\pi}{3}$

مساحة كل مثلث $=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

مساحة المثلثين $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

المساحة الإجمالية $=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$$

(11) $\int_{-4}^{4}\frac{1}{\pi}\sqrt{16-x^2}\,dx-\int_{-4}^{4}x\sqrt{16-x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}-2x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)(p)(4)^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(16-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{4}=8+\frac{1}{3}(0)=8$$

(12) $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+4}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+4}$$

$$2x+3=A_1(x+4)+A_2(x+1)$$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_1=\frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2=\frac{5}{3}$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+4}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{5}{3(x+4)}$$

$$\int\frac{2x+3}{x^2+5x+4}\,dx=\left[\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x+4|\right]_0^2=\frac{1}{3}\ln 3+\frac{5}{3}\ln 6-\frac{5}{3}\ln 4=2\ln 3-\frac{5}{3}\ln 2$$

(13) $\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}=1+\frac{-9x+3}{x^3-6x^2+9x}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$$

$$\frac{-9x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}$$

$$-9x+3=A_1(x-3)^2+A_2x(x-3)+A_3x$$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_3 = -8$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1}{3}$ وعن A_3 بـ -8 ولتكن $x = 1 \quad \therefore \quad A_2 = -\frac{1}{3}$

$$\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x} = 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x-3)} - \frac{8}{(x-3)^2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}\,dx = \left[x + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{8}{x-3}\right]_1^2 = -3 + \frac{2}{3}\ln 2$$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \int_3^5 x^2\sqrt{x^2-4}\,(x\,dx)$

$u = x^2 - 4 \implies du = 2x\,dx$

$x^2 = u + 4$

$$\frac{1}{2}\int_5^{21}(u+4)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_5^{21}u^{\frac{3}{2}}du + 2\int_5^{21}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_5^{21} + \frac{4}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{21} = \frac{581}{5}\sqrt{21} - \frac{35}{3}\sqrt{5}$$

(15) $-x^2 + 9x - 18 = (-x+6)(x-3)$

x		0	2	3		6	
$-x^2+9x-18$	$-$			0	$+$	0	$-$

$-x^2 + 9x - 18 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [0, 2]$

$\therefore \quad \int_0^2 (-x^2 + 9x - 18) \leqslant 0$

(16) $f(x) - g(x) = x^2 + 13x + 15 - 3x + 6 = x^2 + 10x + 21$

$f(x) - g(x) = (x+3)(x+7)$

x		-7		-3	-1	2
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [-1, 2]$

$\int_{-1}^2 (f(x) - g(x))dx \geqslant 0$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 (x^2 + 13x + 15)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 (3x - 6)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 (x^2 + 13x + 15)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 (3x - 6)\,dx$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $A = \int_1^3 8x^3\,dx = 2x^4\Big]_1^3 = 160$ units square

(2) $A = \int_0^5 (-x^2+5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{125}{6}$ units square

(3) $A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12-x^2)dx = \left[12x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 32\sqrt{3}$ units square

(4) $A = \int_{-3}^{-2}(x^2-x-6)dx + \int_{-2}^{2}(-x^2+x+6)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{2} = \frac{43}{2}$ units square

(5) $f(x)=0$ يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا كان:

فيكون: $\Longrightarrow x(x^2-6)=0 \Longrightarrow x=-\sqrt{6}\ ,\ x=0\ ,\ x=\sqrt{6}$

$A = \int_0^{\sqrt{6}}(-x^3+6x)dx + \int_{\sqrt{6}}^{3}(x^3-6x)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+3x^2\right]_0^{\sqrt{6}} + \left[\frac{x^4}{4}-3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3} = \frac{45}{4}$ units square

(6) $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$ units square

(7) $A = \int_0^2 (x^2+x^2-4x+5)dx = \int_0^2 (2x^2-4x+5)dx = \left[2\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^2 = \frac{22}{3}$ units square

(8) $A = \int_1^8 (x-\sqrt[3]{x})dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = \frac{81}{4}$ units square

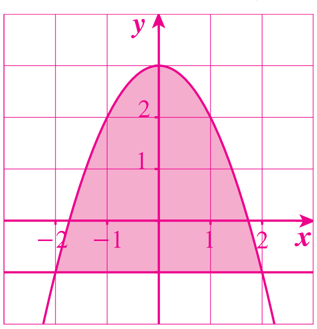
(9) حل $3-x=2x^2$، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x=1$

$A = \int_0^1 (3-x-2x^2)dx + \int_1^3 (2x^2-3+x)dx$

$= \left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3-3x+\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{103}{6}$ *units* square

(10) تقاطع المنحنيات عند $x=\pm 2$

استخدم التناظر:



$A = 2\int_0^2 (3-x^2+1)dx = 2\int_0^2 (4-x^2)dx$

$= 2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-0\right]$

$= \frac{32}{3}$ units square

حل آخر

$f(x) > g(x)$

$A = \int_{-2}^{2}(f(x)-g(x))dx = \int_{-2}^{2}(3-x^2+1)dx$

$= \left[3x-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2} = \left(6-\frac{8}{3}+2\right)-\left(-6+\frac{8}{3}-2\right) = \frac{32}{3}$ units square

(11) حل $x^2 - 2 = 2$ ؛ $x^2 = 4$، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2}[2-(x^2-2)]dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ units square}$$

(12) حل $4x - x^2 = 0$ ؛ $2x - x^2 = -2x$

إذاً، تتقاطع المنحنيات عند $x = 4$ ، $x = 0$

$$A = \int_{0}^{4}(4x-x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{4} = \frac{32}{3} \text{ units square}$$

(13) حل $x^2 = 1$ ؛ $7 - 2x^2 = x^2 + 4$، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x = \pm 1$

$$A = \int_{-1}^{1}[((7-2x^2)-(x^2+4)]dx = \int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx = 3\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$= 3\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 3\left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 4 \text{ units square}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (b) **(5)** (b) **(6)** (d)

(7) (b) **(8)** (c) **(9)** (a) **(10)** (a)

حجوم الأجسام الدورانية — تمرّنْ 2–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) الحجم: $$V = \int_{0}^{2}\pi x^4 dx = \left[\pi \frac{1}{5}x^5\right]_{0}^{2} = \frac{32\pi}{5} \text{ units cube}$$

(2) الحجم: $$V = \pi\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2}dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ units cube}$$

(3) $$V = \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 2\pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{4}{3}\pi \text{ units cube}$$

(4) نقاط التقاطع عند $x = 2$، $x = -1$

$$V = \pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx = \pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$

$$= \pi\left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{2} = \frac{117\pi}{5} \text{ units cube}$$

(5) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = -\frac{\pi}{4}$ إلى $x = \frac{\pi}{4}$

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2-\sec^2 x)dx = \pi[2x - \tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi^2 - 2\pi \quad \text{units cube}$$

(6) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 1$ إلى $x = 4$

$$V = \pi\int_{1}^{4}((x+1)^2-(x-1)^2)dx = \pi\int_{1}^{4}4x = [2\pi x^2]_{1}^{4} = 30\pi \text{ units cube}$$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$

$$V = \pi\int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\frac{\pi}{3} \text{ units cube}$$

(8) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 4$

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx \Longrightarrow V = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \text{ units cube}$$

(9) $V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ units cube}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)	**(6)** (d)
(7) (d)	**(8)** (c)	**(9)** (a)	**(10)** (c)	**(11)** (d)	**(12)** (d)

طول قوس ومعادلة منحنى دالة — تمرَّنْ 3–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\,dx = \frac{2}{27}\left[(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{14}{27} \text{ units}$$

(2) $f'(x) = 2(7 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{1 + 4(7 + 4x)}\,dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{29 + 16x}\,dx = \left[\frac{(29 + 16x)^{\frac{3}{2}}}{24}\right]_1^{\frac{5}{4}}$$

$$L = \frac{343 - 135\sqrt{5}}{24} \approx 1.714 \text{ units}$$

(3) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$L = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x}\right]_1^2 = \frac{17}{12} \text{ units}$$

(4) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 19$

(5) $f(x) = -x^4 + x^2 + 5x - 2$

(6) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 3$

(7) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$

(8) $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5| + 3$

(9) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + C_1$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow C_1 = 3$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + C_2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} \Longrightarrow C_2 = 2$

$\Longrightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)	**(6)** (b)
(7) (b)	**(8)** (c)	**(9)** (d)			

المعادلات التفاضلية

تمرَّنْ 4–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y' = y'' = 3e^x \Longrightarrow 3e^x - 3e^x + 2x = 2x \Longrightarrow 2x = 2x$

إذًا الدالة $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) $y' = y'' = e^x \Longrightarrow e^x + e^x = 2e^x$

إذًا الدالة $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

(3) $y = \int (x^2 + x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

$y(1) = 4$

$\therefore\ C = \frac{7}{6}$

$\therefore\ y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{6}$

(4) $y' = \frac{1}{x} - x$

$\therefore\ y = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$

(5) $y = 4\ln|x| + C$

$\therefore\ C = 1$

$\therefore\ y = 4\ln|x| + 1$

(6) $y(x) = ke^{3x}$

(7) $y = ke^{5x}$

(8) $y = ke^{\frac{5}{2}x}$

$\therefore\ k = 4e^{-5}$

$\therefore\ y = 4e^{\frac{5}{2}x-5}$

(9) $y = ke^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

$y(0) = \sqrt{2}$

$\therefore\ k = \sqrt{2}$

$\therefore\ y = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

(10) $y = ke^{x} - 1$

(11) $y = ke^{-8x} + \dfrac{1}{4}$

$ke^{-8x} + \dfrac{1}{4}$

$k = \dfrac{e^2}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{2}e^{2-8x} + \dfrac{1}{4}$

(12) $y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 4$

$y(0) = 2$

$\therefore\ k = -2$

$\therefore\ y = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 4$

(13) $y' = \cos 4x + C_1$

$y = \dfrac{1}{4}\sin 4x + C_1 x + C_2$

(14) $y' = 3x^2 - 8x + C_1$

$y = x^3 - 4x^2 + C_1 x + C_2$

(15) $y = C_1 e^{\frac{5}{2}x} + C_2 e^{-3x}$

(16) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$

(17) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

(18) $y = (C_1 x + C_2)e^{x}$

(19) $y = e^{-x}\left(C_1 \cos \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin \dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

(20) (a) $y = ke^{-2x}$

(b) $k = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}e^{-2x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (b)	(5) (a)	(6) (a)
(7) (a)	(8) (c)	(9) (b)	(10) (c)	(11) (c)	(12) (d)
(13) (a)	(14) (d)				

اختبار الوحدة السادسة

(1) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$.

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ units square}$$

(2) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 1$ إلى $x = 5$.

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \frac{32}{3} \textit{ units} \text{ square}$$

(3) $A = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx + \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 4 + 4 = 8 \text{ units square}$

(4) $A = \int_1^2 (x^2 + 1 - \sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ units square}$

(5) يتقاطع المنحنيات عند النقط: $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 + 1 - x - 1)dx + \int_0^1 (x + 1 - x^3 - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ units square}$$

(6) يتقاطع المنحنيات عند $x = -2$ و $x = 2$.

$$V = \pi\int_{-2}^2 \left(4 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \pi\left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^2 = \frac{64}{5}\pi \text{ units cube}$$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}} [(-x + 3)^2 - (x + 2)^2]dx + \pi\int_{\frac{1}{2}}^2 [(x + 2)^2 - (-x + 3)^2]dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (5 - 10x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (-5 + 10x)dx$$

$$= [5x - 5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [-5x + 5x^2]_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{135}{4}\pi \text{ units cube}$$

(8) $V = \pi\int_{-2}^1 [(-x^2 + 4)^2 - (x + 2)^2]dx = \pi\int_{-2}^1 (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)dx$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^1 = \frac{108}{5}\pi \text{ units cube}$$

(9) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x}\, dx = \frac{8}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12} = \frac{56}{3} \text{ units}$$

(10) $f'(x) = -\sqrt{3}$

$L = \int_{-3}^{1} \sqrt{1+3}\, dx = \int_{-3}^{1} 2dx = 8$ units

(11) $f'(x) = (-1+2x)^{\frac{1}{2}}$

$L = \int_{2}^{8} \sqrt{1+(-1+2x)}\, dx = \int_{2}^{8} \sqrt{2x}\, dx = \frac{56}{3}$ units

(12) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x + C$

يمر بالنّقطة $A(-1,-5) \quad \therefore \quad C = -2$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

(13) $f'(x) = \frac{-1}{3x-2} \quad \therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$

يمر بالنّقطة $A(1,-1) \quad \therefore \quad C = -1$

$\therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x-2| - 1$

(14) $A(-1\ ,\ 3)$ نقطة صغرى محليّة إذاً:

$f'(-1) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 4x + C_1 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + C_2$

منحنى f يمرّ بالنقطة $A(-1\ ,\ 3)$ إذاً:

$C_2 = 4$

$\therefore \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

(15) $y = ke^{-\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$

(16) $y = k|x|^{\frac{5}{3}}$

(17) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

(18) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$

(19) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

(20) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

تمارين إثرائية

(1) $A = \int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)dx = \int_0^{\pi}\sin^2 x\, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ units square $\qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

(2) استخدم التناظر:

$$2\int_0^2 [2x^2-(x^4-2x^2)]dx = 2\int_0^2(-x^4+4x^2)dx = 2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(-\frac{32}{5}+\frac{32}{3}\right)-0\right]$$

$$= \frac{128}{15} \text{ units square}$$

(3) استخدم التناظر:

$$2\int_0^1(x^2+2x^4)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) = \frac{22}{15} \text{ units square}$$

(4) $A = \int_{-2}^{2}(8+2x^2-x^4)dx = \frac{448}{15} \approx 32.5\overline{3}$ units square

(5) $A(x) = \int_{-3}^{5}(15+2x-x^2)dx = \frac{256}{3}$ units square

(6) يتقاطع منحنيا $g(x) = x$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$ عند $x = 1$ ومنه تكون:

$$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}-(-1)\right] = 1 \text{ units square}$$

(7) $V = \pi\int_0^2\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)[(2-x)^3]_0^2 = \frac{2\pi}{3}$ units cube

(8) $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\cos^2 x)dx$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \text{ units cube}$$

(9) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

$$\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\cos 3\times\frac{\pi}{3} + C$$

$$\therefore\ C = 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$$

(10) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{27}\sqrt{1+\frac{9}{16}x}\,dx = \frac{32}{27}\left[\frac{259}{64}\sqrt{259}-1\right] \approx 76 \text{ units}$$

(11) $y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + \frac{4}{3}$

(12) $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$

(13) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$

(14) (a) $y = ke^{ax} + 2$

(b) $k = 168 \quad \therefore \quad y = 168e^{ax} + 2$

(c) $7 = 168e^{6a} \Longrightarrow a = -\dfrac{\ln 24}{6}$

(15) $f'(x) = 3x^{2} - 6x + C_{1}$

$A(3, -2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f إذاً:

$f'(3) = 0 \quad \therefore \quad C_{1} = -9$

$f(x) = x^{3} - 3x^{2} - 9x + C_{2}$

$A(3, -2)$ هي نقطة على منحنى الدالة f إذاً:

$f(3) = -2 \quad \therefore \quad C_{2} = 25$

$\therefore \quad f(x) = x^{3} - 3x^{2} - 9x + 25$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y^2 = -12x$

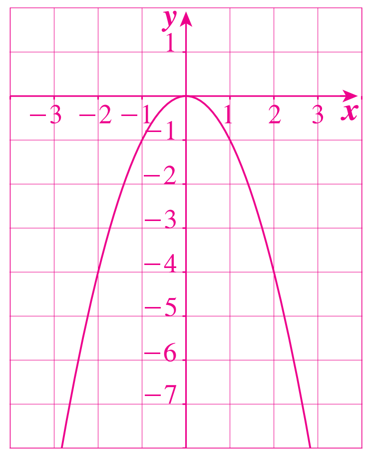
(2) $x^2 = -8y$

(3) $x^2 = 8y$

(4) $x^2 = -y$ البؤرة $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

الدليل: $y = \frac{1}{4}$

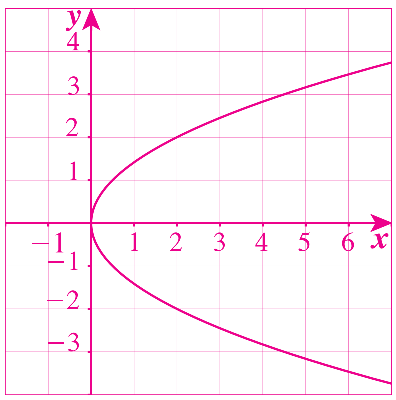
خطّ التماثل محور الصادات



(5) $y^2 = 2x$ البؤرة $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

الدليل: $x = \frac{-1}{2}$

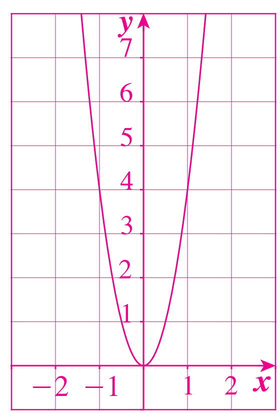
خطّ التماثل محور السينات



(6) $y = 4x^2$ $x^2 = \frac{1}{4}y$ البؤرة $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

الدليل: $y = \frac{-1}{16}$

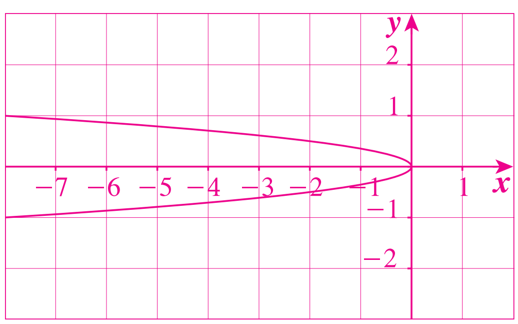
خطّ التماثل محور الصادات



(7) $x = -8y^2$ $y^2 = \frac{-x}{8}$ البؤرة $\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$

الدليل: $x = \frac{1}{32}$

خطّ التماثل محور السينات



(8) معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x, y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(2^2) = 4p(-1)$$
$$4 = -4p$$
$$p = -1$$

المعادلة:

$$y^2 = -4x$$

(9) النقطتان $B(3,4)$, $A(-3,4)$ متماثلتان في محور الصادات

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = 4py$

وبالتّعويض عن (x,y) بإحداثيات A (أو بإحداثيات B) نحصل على:

$$(-3)^2 = 4p(4)$$

$$9 = 16p \Longrightarrow p = \frac{9}{16}$$

المعادلة:

$$x^2 = 4 \times \frac{9}{16}y$$

$$x^2 = \frac{9}{4}y$$

(10) البؤرة $(0\ ;\ -4)$ إذاً المعادلة هي: $x^2 = -16y$

(11) البؤرة $(5\ ;\ 0)$ إذاً المعادلة هي: $y^2 = 20x$

(12) $x^2 = 10y$ $\quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ إذاً البؤرة $\left(0\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

(13) معادلة القطع المكافئ هي على الصورة: $x^2 = 4py$

لنأخذ النقطة $A(50\ ,15)$ وبالتعويض عن (x,y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(50)^2 = 4p(15)$$

$$2\,500 = 60p$$

$$p = \frac{125}{3}$$

المعادلة:

$$x^2 = \frac{500}{3}y$$

الإحداثي السيني للدعامة: $50 - 8 = 42$

بالتعويض في المعادلة نوجد y : $(42)^2 = \frac{500}{3}y$ ومنه $y \approx 10.6$

طول الدعامة يكون: $10.6 + 5 = 15.6\text{ m}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (a)	**(8)** (d)	**(9)** (c)	**(10)** (d)
(11) (a)	**(12)** (b)	**(13)** (c)	**(14)** (a)	**(15)** (b)
(16) (c)	**(17)** (b)	**(18)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=8^2 \Longrightarrow a=8$

رأسا القطع: $A_1(-8,0)\ ,\ A_2(8,0)$

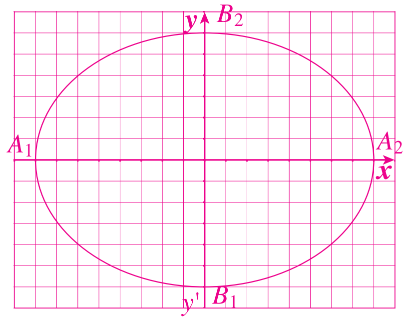
$b^2=6^2 \Longrightarrow b=6$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0,-6)\ ,\ B_2(0,6)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=8^2-6^2=28 \Longrightarrow c=2\sqrt{7}$

البؤرتان: $F_1(-2\sqrt{7},0)\ ,\ F_2(2\sqrt{7},0)$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $x=-\frac{a^2}{c}=\frac{-64}{2\sqrt{7}}=\frac{-32\sqrt{7}}{7}\quad ,\quad x=\frac{a^2}{c}=\frac{64}{2\sqrt{7}}=\frac{32\sqrt{7}}{7}$

طول المحور الأكبر: $2a=2\times 8=16$

طول المحور الأصغر: $2b=2\times 6=12$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=6^2 \Longrightarrow a=6$

رأسا القطع: $A_1(0,-6)\ ,\ A_2(0,6)$

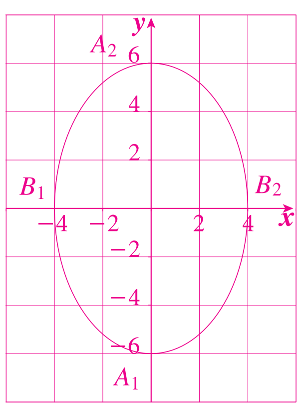
$b^2=4^2 \Longrightarrow b=4$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-4,0)\ ,\ B_2(4,0)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=6^2-4^2=20 \Longrightarrow c=2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-2\sqrt{5})\ ,\ F_2(0,2\sqrt{5})$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $y = -\frac{a^2}{c} = \frac{-36}{2\sqrt{5}} = \frac{-18\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $y = \frac{a^2}{c} = \frac{36}{2\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$

طول المحور الأكبر: $2a = 12$

طول المحور الأصغر: $2b = 8$

(3) $3x^2 + 5y^2 - 225 = 0$

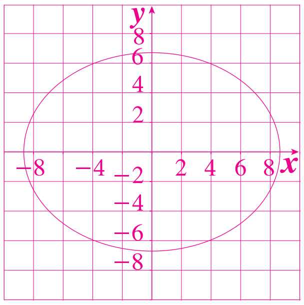
$\frac{3x^2}{225} + \frac{5y^2}{225} = \frac{225}{225}$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{45} = 1$

$a^2 = 75 \Longrightarrow a = 5\sqrt{3}$

رأسا القطع: $A_1(5\sqrt{3}, 0)\ ,\ A_2(-5\sqrt{3}, 0)$

$b^2 = 45 \Longrightarrow b = 3\sqrt{5}$



النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0, -3\sqrt{5})\ ,\ B_2(0, 3\sqrt{5})$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 75 - 45 = 30 \Longrightarrow c = \sqrt{30}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{30}, 0)\ ,\ F_2(\sqrt{30}, 0)$

معادلتا دليلي القطع: $x = -\frac{a^2}{c} = \frac{-75}{\sqrt{30}} = \frac{-5\sqrt{30}}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{a^2}{c} = \frac{75}{\sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{30}}{2}$

طول المحور الأكبر: $2a = 10\sqrt{3}$

طول المحور الأصغر: $2b = 6\sqrt{5}$

(4) $4x^2 + y^2 - 28 = 0$

$\frac{4x^2}{28} + \frac{y^2}{28} = \frac{28}{28}$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{28} = 1$

$a^2 = 28 \Longrightarrow a = 2\sqrt{7}$

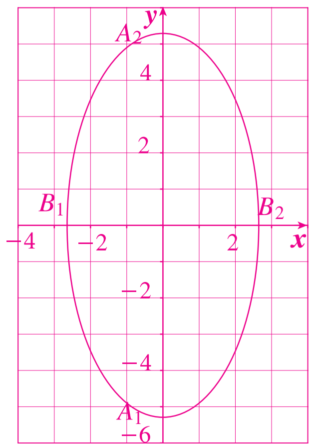
رأسا القطع: $A_1(0, -2\sqrt{7})\ ,\ A_2(0, 2\sqrt{7})$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-\sqrt{7}, 0)$, $B_2(\sqrt{7}, 0)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 28 - 7 = 21 \Longrightarrow c = \sqrt{21}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{21})$, $F_2(0, \sqrt{21})$



معادلتا دليلي القطع الناقص:

$y = -\frac{a^2}{c} = \frac{-28}{\sqrt{21}} = \frac{-28\sqrt{21}}{21} = \frac{-4}{3}\sqrt{21}$, $y = \frac{a^2}{c} = \frac{28}{\sqrt{21}} = \frac{28\sqrt{21}}{21} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$

طول المحور الأكبر: $2a = 4\sqrt{7}$

طول المحور الأصغر: $2b = 2\sqrt{7}$

(5) $c = 2$, $b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

(6) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5$; $c = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(7) $a = 5$, $2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

فتكون معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

(8) $b = 4$

$2a = 10 \Longrightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(9) $c = 5$

$a^2 = b^2 + 5^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + 25$

$\frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$

$$\Longrightarrow a^2b^2 = 4b^2 + 9a^2 \Longrightarrow (b^2+25)b^2 = 4b^2 + 9(b^2+25) \Longrightarrow b^4 + 25b^2 = 4b^2 + 9b^2 + 225$$

$$\Longrightarrow b^4 + 12b^2 - 225 = 0 \Longrightarrow b^2 = -6 + 3\sqrt{29}$$

$$\Longrightarrow a^2 = 19 + 3\sqrt{29}$$

$$\frac{x^2}{(19+3\sqrt{29})} + \frac{y^2}{(-6+3\sqrt{29})} = 1$$

(10) $a = 6 \ ; \ b = 4$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

(11) $c = 5 \ ; \ 2b = 6 \Longrightarrow b = \frac{6}{2} = 3$

$a^2 = c^2 + b^2 \Longrightarrow a^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

(12) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5 \ ; \ 2c = 6 \Longrightarrow c = \frac{6}{2} = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (c)
(7) (a)	**(8)** (b)	**(9)** (d)	**(10)** (d)	**(11)** (b)	**(12)** (c)
(13) (b)	**(14)** (c)	**(15)** (d)			

القطع الزائد

تمرّنْ 3–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

$\therefore \ a^2 = 25 \ \therefore \ a = 5$ رأسا القطع الزائد: $A_1(0,5) \ , \ A_2(0,-5)$

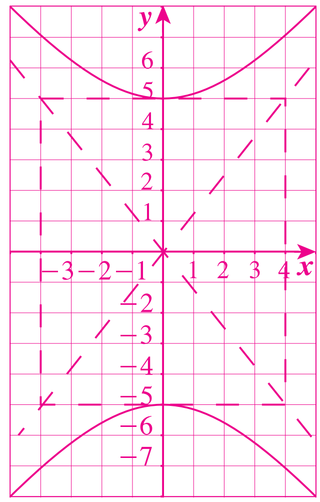
$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41 \Longrightarrow c = \sqrt{41}$

$F_1(0,\sqrt{41})\ ,\ F_2(0,-\sqrt{41})$:البؤرتان

$y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{5}{4}x$:معادلتا الخطين المقاربين

$y=\pm\dfrac{a^2}{c}=\pm\dfrac{25\sqrt{41}}{41}$:معادلتا الدليلين



$2a=4\times5=10$:طول المحور الأكبر

$2b=2\times4=8$:طول المحور المرافق

(2) $24x^2-12y^2-192=0$

$\dfrac{24x^2}{192}-\dfrac{12y^2}{192}=\dfrac{192}{192}$

$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{16}=1$

$a^2=8\Longrightarrow a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$A_1(2\sqrt{2},0)\ ,\ A_2(-2\sqrt{2},0)$:رأسا القطع

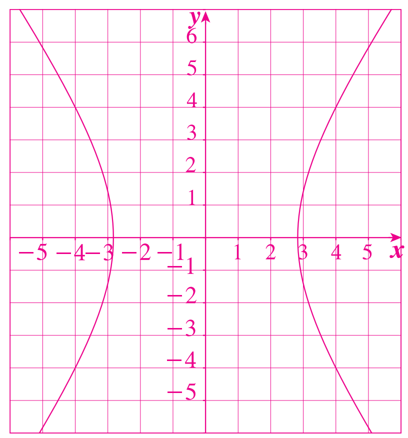
$b^2=16\Longrightarrow b=4$

$c^2=a^2+b^2=8+16=24\Longrightarrow c=2\sqrt{6}$

$F_1(2\sqrt{6},0)\ ,\ F_2(-2\sqrt{6},0)$:البؤرتان

$y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{4x}{2\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}x$:معادلتا الخطين المقاربين

$x=\pm\dfrac{a^2}{c}=\pm\dfrac{8}{2\sqrt{6}}=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$:معادلتا الدليلين



$2a=4\sqrt{2}$:طول المحور الأكبر

$2b=2\times4=8$:طول المحور المرافق

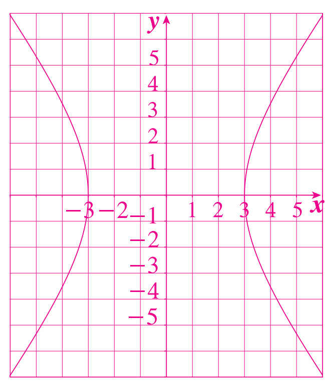
(3) $c=5\ ,\ a=3$

$c^2=a^2+b^2=b^2=c^2-a^2$

$b^2=25-9=16\Longrightarrow b=4$

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$:معادلة القطع الزائد

$y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{4x}{3}$:معادلتا الخطين المقاربين



(4) $\frac{a}{b} = 2 \Longrightarrow a = 2b$

$$c = \sqrt{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow (2b^2) + b^2 = 5 \Longrightarrow 5b^2 = 5$$

$$\Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$$

$$\therefore \quad a = 2$$

معادلة القطع الزائد: $\Longrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1\ ,\ \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

(5) $a = \frac{2}{3}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لنضع إحداثيات النقطة $(1, 1)$ في المعادلة:

$$\frac{1}{\frac{4}{9}} - \frac{1}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2 = \frac{4}{5}$$

معادلة القطع الزائد: $\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$

(6) بما أن محوره الأساسي هو جزء من محور السينات فالمعادلة هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

لنضع إحداثيات A في المعادلة:

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{a^2} = \frac{1}{b^2} + 1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}$$

لنضع إحداثيات B في المعادلة:

$$\frac{16}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$$

بالتعويض نوجد المعادلة التالية:

$$16\left(\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{b^2} = 1$$

$$4 + \frac{4}{b^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{5}{b^2} = 3 \Longrightarrow b^2 = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 \Longrightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{8}{5} \Longrightarrow a^2 = \frac{5}{2}$$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$

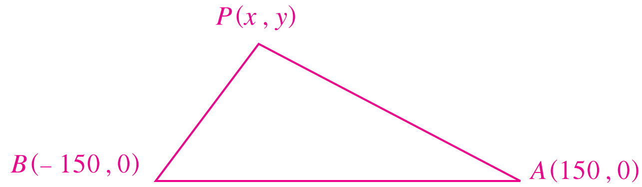
(7) نستخدم قاعدة المسافة بدلالة الزمن والسرعة:

$$d = vt \Longleftrightarrow t = \frac{d}{v}$$

$$t_1 = \frac{PA}{50}$$

$$t_2 = \frac{PB}{50}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{PA}{50} - \frac{PB}{50}$$



ولكن: $t_1 - t_2 = 2$

$$2 = \frac{PA}{50} - \frac{PB}{50} \Longrightarrow PA - PB = 100$$

بما أن A, B نقطتان ثابتتان فيكون منحنى النقاط المتغيرة P هي قطع زائد بؤرتاه هما A, B حيث: $2a = 100$

$c = 150 \;,\; a = 50$

$b^2 = (150)^2 - (50)^2 = 20\,000$

معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{2\,500} - \frac{y^2}{20\,000} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (c)

(6) (a) **(7)** (d) **(8)** (b) **(9)** (c) **(10)** (b)

(11) (a) **(12)** (c) **(13)** (a) **(14)** (d)

الاختلاف المركزي تمرَّنْ 4–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $e = \frac{3}{2} \;,\; \frac{3}{2} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$c = 3 \;,\; e = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \Longrightarrow a = 2$

ولكن في القطع الزائد:

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 9 - 4$

$b^2 = 5$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

(2) $e = \frac{\sqrt{7}}{4} \;,\; \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

$c = \sqrt{7} \;,\; e = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{a} \Longrightarrow a = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 16 - 7 \Longrightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

(3) $e = \frac{5}{3}\ ,\ \frac{5}{3} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$a = 4\ ,\ e = \frac{c}{a}$

$\frac{c}{4} = \frac{5}{3} \Longrightarrow c = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3}$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{256}{9}} = 1$

(4) $e = \frac{3}{4}\ ,\ \frac{3}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

معادلة الدليل: $8 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow c = \frac{a^2}{8}$

$\frac{3}{4} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a^2}{8}}{a} \Longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{8} \Longrightarrow a = 6$

$c = e \cdot a = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 36 - \frac{81}{4} = \frac{63}{4}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{63}{4}} = 1$

(5) $(a^2 = 9\ ,\ b^2 = 4) \Longrightarrow (a = 3\ ,\ b = 2)$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = 9 - 4 = 5 \Longrightarrow c = \sqrt{5}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ على الصورة $\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$$

(7) $a^2 = 7 \Longrightarrow a = \sqrt{7}$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

الرأسان: $A_1(-\sqrt{7}, 0)$, $A_2(\sqrt{7}, 0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 16 \Longrightarrow c = \sqrt{23}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{23}, 0)$, $F_2(\sqrt{23}, 0)$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}$

معادلتا الدليلين: $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{7}{\sqrt{23}} = \pm \frac{7\sqrt{23}}{23}$

(8) $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

الرأسان: $A_1(0, -4)$, $A_2(0, 4)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20 \Longrightarrow c = 2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0, -2\sqrt{5})$, $F_2(0, 2\sqrt{5})$

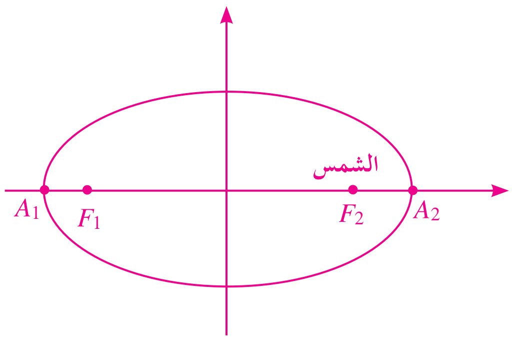
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

معادلتا الدليلين: $y = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{16}{2\sqrt{5}} = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5}$

(9) $2a = 3\,000\,000 \Longrightarrow a = 150\,000$

$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = e \cdot a = 0.017 \times 150\,000 = 2\,550$

$c = 2\,550$



أصغر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_2 فيكون:

$F_2A_2 = 150\,000 - 2\,550 = 147\,450$ km

أكبر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_1 فيكون:

$F_2A_1 = 150\,000 + 2\,550 = 152\,550$ km

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (a)
(7) (b)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	**(10)** (d)	**(11)** (a)	**(12)** (c)
(13) (a)	**(14)** (b)	**(15)** (d)	**(16)** (a)		

اختبار الوحدة السابعة

(1) $4y^2 - 9x^2 = 36 \Longrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 9 \;\;,\;\; b^2 = 4$

$\Longrightarrow c^2 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{13}) \;,\; F_2(0, \sqrt{13})$

(2) $-2x^2 + 3y^2 + 10 = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 3y^2 = -10 \Longrightarrow 2x^2 - 3y^2 = 10$

$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{\frac{10}{3}} = 1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 5 \;,\; b^2 = \frac{10}{3}$

$\Longrightarrow c^2 = \frac{25}{3} \Longrightarrow c = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

البؤرتان: $F_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right) \;,\; F_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

(3) $2x^2 + y^2 = 9$

$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{9} = 1$

إذًا هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = \frac{9}{2} \;,\; b^2 = 9$

$c^2 = 9 - \frac{9}{2}$

$c^2 = \frac{9}{2}$

البؤرتان: $F_1\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \;,\; F_2\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $2x^2 - y^2 + 6 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - y^2 = -6 \Longrightarrow y^2 - 2x^2 = 6$

$\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 6 \;,\; b^2 = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

البؤرتان: $F_1(0, -3) \;,\; F_2(0, 3)$

(5) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 5^2 \Longrightarrow a = 5$

$b^2 = 2^2 \Longrightarrow b = 2$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Longrightarrow c = \sqrt{21}$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{21})\ ;\ F_2(0, \sqrt{21})$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{25}{\sqrt{21}} = \pm\frac{25\sqrt{21}}{21}$

(6) $y^2 = 5x$.

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p = 5 \Longrightarrow p = \frac{5}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = -\frac{5}{4}$

(7) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 4 \Longrightarrow a = 2$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{13}, 0)\ ;\ F_2(\sqrt{13}, 0)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{4}{\sqrt{13}} = \pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{2}x$

(8) $\frac{x^2}{18^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 18^2 \Longrightarrow a = 18$

$b^2 = 10^2 \Longrightarrow b = 10$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 = c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 18^2 - 10^2 = 224 \Longrightarrow c = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{14}}{18} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

البؤرتان: $F_1(-4\sqrt{14}, 0)$; $F_2(4\sqrt{14}, 0)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{18^2}{4\sqrt{14}} = \pm \frac{81\sqrt{14}}{14}$

(9) $y^2 = -3x$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p = -3 \Longrightarrow p = -\frac{3}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = \frac{3}{4}$

(10) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow c = 5$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

البؤرتان: $F_1(0, -5)$; $F_2(0, 5)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{16}{5}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{4}{3}x$

(11) $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

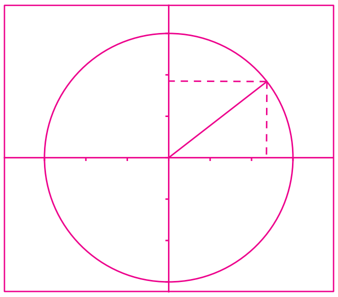
لتكن $M(x, y)$ نقطة على دائرة؛ لنذكّر أنّ $OM = r$.

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = r^2$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$



(12) $e = \frac{c}{a} = \frac{213125.9}{107124} \approx 1.99$

$e = 1.99 > 1$ إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$b^2 = c^2 - a^2 \Longrightarrow b^2 = 3.39 \times 10^{10}$

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور أفقي.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ تكون المعادلة:

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1.15 \times 10^{10}} - \frac{y^2}{3.39 \times 10^{10}} = 1$

(13) لتكن $M(x, y)$ نقطة على القطع الزائد و $F_2(155, 0)$ ، $F_1(-155, 0)$ البؤرتين.

$|MF_1 - MF_2| = 80$

$2a = 80 \Longrightarrow a = 40 \Longrightarrow a^2 = 1\,600$

$\therefore \; c = 155$

$b^2 = c^2 - a^2$ في القطع الزائد:

$b^2 = 22\,425$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{22\,425} = 1$

(14) **(a)** $e = \frac{\sqrt{2}}{2} \; , \; \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

إذاً هي معادلة قطع ناقص.

(b) $e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 2c = \sqrt{2}\,a \Longrightarrow a = \sqrt{2}\,c$

$x = 4 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow 4 = \frac{(\sqrt{2}\,c)^2}{c} = 2c \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow a = 2\sqrt{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow (2\sqrt{2})^2 = b^2 + 4 \Longrightarrow b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$ في القطع الناقص:

(c) الصورة العامة للقطع الناقص حيث أن المحور القاطع ينطبق على محور السينات هي:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(15) $e = \frac{5}{4} \; , \; \frac{5}{4} > 1$ إذاً هي معادلة قطع زائد.

$\frac{5}{4} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 4c = 5a \Longrightarrow a = \frac{4}{5}c$

$c = 5 \Longrightarrow a = \frac{4}{5} \times 5 = 4$

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$ في القطع الزائد:

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ إذاً الصورة العامة للقطع الزائد هي:

(16) $x^2 = -4y$

(17) $y^2 = 8x$

(18) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

(20) $2a=12 \Longrightarrow a=6$

$2c=20 \Longrightarrow c=10$

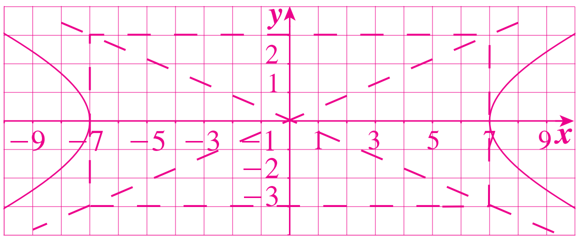
$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow b^2=c^2-a^2=100-36=64 \Longrightarrow b=8$

المعادلة: $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$

تمارين إثرائية

(1) معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$

$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \therefore \quad y=\pm\frac{3}{7}x$



(2) $a=10 \qquad b=7$

$c^2=a^2-b^2=100-49=51 \Longrightarrow c=\sqrt{51}$

$\therefore \; F_1(-\sqrt{51},0)\;,\; F_2(\sqrt{51},0)$

(3) $m=0 \Longrightarrow y^2-x=0$

$y^2=x$

معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل

$4p=1 \Longrightarrow p=\frac{1}{4}$

البؤرة: $F\left(\frac{1}{4},0\right)$

معادلة الدليل $x=-\frac{1}{4}$

(4) $x^2-5y^2+7=0 \Longrightarrow x^2-5y^2=-7 \Longrightarrow 5y^2-x^2=7$

$\frac{y^2}{\frac{7}{5}}-\frac{x^2}{7}=1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=\frac{7}{5} \Longrightarrow a=\sqrt{\frac{7}{5}}$

$b^2=7 \Longrightarrow b=\sqrt{7}$

الرأسان: $A_1\left(0,-\sqrt{\frac{7}{5}}\right)\;;\;A_2\left(0,\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{\sqrt{\frac{7}{5}}}{\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{7}{5} + 7 = \frac{42}{5} \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{42}{5}}$

$F_1\left(0\,,-\sqrt{\frac{42}{5}}\right)\ ;\ F_2\left(0\,,\sqrt{\frac{42}{5}}\right)$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{7}{\frac{5\sqrt{42}}{\sqrt{5}}} = \pm\frac{\sqrt{210}}{30}$

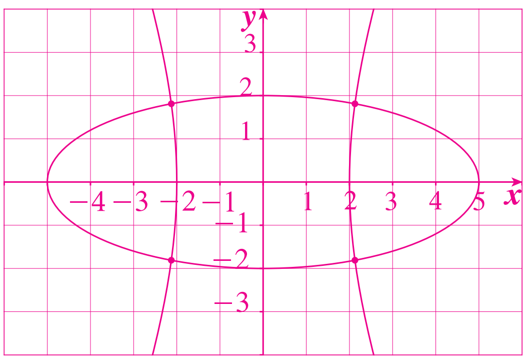
(5) (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

إذاً هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

(b)



يبيّن الشكل وجود 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين.

(c) $\frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{25}$

$x^2 = 4\left(1 + \frac{y^2}{25}\right)$

$\frac{x^2}{25} = 1 - \frac{y^2}{4}$

$x^2 = 25\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$

$\Longrightarrow 4\left(1 + \frac{y^2}{25}\right) = 25\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$

$\Longrightarrow 4 + \frac{4}{25}y^2 = 25 - \frac{25}{4}y^2 \Longrightarrow y^2\left(\frac{4}{25} + \frac{25}{4}\right) = 25 - 4$

$\frac{641}{100}y^2 = 21$

$y^2 = \frac{2\,100}{641}$

$y = \pm 10\sqrt{\frac{21}{641}}$

$x^2 = \frac{2\,900}{641}$

$x = \pm 10\sqrt{\frac{29}{641}}$

يوجد 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين.

(6) $e = \frac{7}{5}\ ,\ \frac{7}{5} > 1$

إذاً قطع زائد.

$\frac{7}{5} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 7a = 5c \Longrightarrow a = \frac{5}{7}c$

$\frac{25}{7} = \frac{a^2}{c} = \frac{\frac{25}{49}c^2}{c} = \frac{25}{49}c \Longrightarrow c = 7 \Longrightarrow a = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = 24$

معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$

(7) $e = \frac{5}{7}\ ,\ \frac{5}{7} < 1$

إذاً إنه قطع ناقص

$c = 5$

$\frac{c}{a} = \frac{5}{7}\ ;\ \frac{5}{a} = \frac{5}{7} \Longrightarrow a = 7$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow b^2 = 49 - 25 \Longrightarrow b^2 = 24$

المعادلة: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

(8) الخط المقارب $y = \frac{b}{a}x$ يمر بالنقطة $A(3,5)$ فيكون:

$5 = \frac{b}{a}(3) \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{3} \Longrightarrow a = \frac{3}{5}b$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 34 = \frac{9b^2}{25} + b^2 \Longrightarrow 34 = \frac{34b^2}{25} \Longrightarrow b^2 = 25 \Longrightarrow b = 5$

$a = \frac{3}{5}(5) = 3$

فتكون معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

(9) $\frac{a}{b} = 2\ ,\ c = \sqrt{5}\ ,\ a = 2b$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 5 = b^2 + 4b^2 \Longrightarrow 5 = 5b^2 \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$

ولكن: $a = 2b \Longrightarrow a = 2$

لذا معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

(10) $a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = b^2 - a^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow c = 4$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-4)\ ,\ F_2(0,4)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{25}{4}$

(11) $8y^2 - 25x^2 = 200 \Longrightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{8} = 1$

$a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

$b^2 = 8 \Longrightarrow b = 2\sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 8 = 33 \Longrightarrow c = \sqrt{33}$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{33}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{33})\ ;\ F_2(0, \sqrt{33})$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{25}{\sqrt{33}} = \pm\frac{25\sqrt{33}}{33}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{a}{b}x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{4}x$

(12) $x^2 = -2y$

$4p = -2 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y = \frac{1}{2}$

(13) $y^2 = -x$

$4p = -1 \Longrightarrow p = -\frac{1}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = \frac{1}{4}$

(14) $5x^2 - 9y^2 = 45 \Longrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 5 \Longrightarrow b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14 \Longrightarrow c = \sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{14}, 0)\ ;\ F_2(\sqrt{14}, 0)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{9\sqrt{14}}{14}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** فضاء العينة: $(S) = \{(H, T), (T, T), (T, H), (H, H)\}$

عدد عناصره: $n(S) = 4$

(b) $X \in \{0, 1, 2\}$

(c) $P(X = 0) = \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = \frac{1}{4}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) **(a)** $X = \{0, 1, 2, 3\}$

X متغير عشوائي متقطّع.

(b) $Y = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

Y متغير عشوائي متقطّع.

(c) $Z = \{1, 2, 3, 4\}$

Z متغير عشوائي متقطّع.

(3) $k = 1 - (0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.3) = 0.1$

(4) $f(2) = 1 - (0.1 + 0.4 + 0.2) = 0.3$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

(5) **(a)** عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = {}_{10}C_5 = 252$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(c) $P(X = 0) = \frac{{}_6C_5 \times {}_4C_0}{252} = \frac{1}{42}$

$P(X = 1) = \frac{{}_6C_4 \times {}_4C_1}{252} = \frac{5}{21}$

$$P(X=2)=\frac{{}_6C_3\times{}_4C_2}{252}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_3}{252}=\frac{5}{21}$$

$$P(X=4)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_4}{252}=\frac{1}{42}$$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

(6) $\mu = 0\times0.2+1\times0.3+2\times0.4+3\times0.1=1.4$

إذًا، التوقع: $(\mu)=1.4$

(7) **(a)** $\mu = 7\times\frac{1}{8}+8\times\frac{3}{8}+9\times\frac{3}{8}+10\times\frac{1}{8}=\frac{17}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu)=\frac{17}{2}$

(b) $\sigma^2 = 49\times\frac{1}{8}+64\times\frac{3}{8}+81\times\frac{3}{8}+100\times\frac{1}{8}-\left(\frac{17}{2}\right)^2=0.75$

إذًا، التباين: $(\sigma^2)=0.75$

(c) $\sigma=\sqrt{0.75}=0.866$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma)=0.866$

(8) $F(0)=P(X\leqslant 0)=0.2$

$F(1)=P(X\leqslant 1)=P(X<1)+P(X=1)=0.2+0.15=0.35$

$F(2)=P(X\leqslant 2)=P(X<2)+P(X=2)=0.2+0.15+0.1=0.45$

$F(3)=P(X\leqslant 3)=P(X<3)+P(X=3)=0.2+0.15+0.1+0.25=0.7$

$F(3.5)=P(X\leqslant 3.5)=P(X<3)+P(X=3)=0.2+0.15+0.1+0.25=0.7$

$F(4)=P(X\leqslant 4)=P(X<4)+P(X=4)=0.2+0.15+0.1+0.25+0.3=1$

$F(5)=P(X\leqslant 5)=P(X<5)+P(X=5)=1$

(9) **(a)** $P(-1<X<5)=F(5)-F(-1)=0.7-0.1=0.6$

(b) $P(3\leq X<7)=F(7)-F(3)=1-0.45=0.55$

(c) $P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-F(3)=1-0.45=0.55$

(10) **(a)** $P(X=0)={}_8C_0\times0.3^0\times(1-0.3)^8=0.0576$

(b) $P(2<X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$$={}_8C_3\times0.3^3\times0.7^5+{}_8C_4\times0.3^4\times0.7^4+{}_8C_5\times0.3^5\times0.7^3=0.437$$

(11) **(a)** $P(X=0) = {}_{10}C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^{10} = 9.766.10^{-4}$

(b) $P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$

$$= {}_{10}C_3 \times 0.5^3 \times 0.5^7 + {}_{10}C_4 \times 0.5^4 \times 0.5^6 = 0.322$$

(12) $n = 100 \;\; , \;\; p = 0.03$

$\mu = n\,p = 100 \times 0.03 = 3$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 3$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 100 \times 0.03 \times 0.97 = 2.91$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 2.91$

$\sigma = \sqrt{2.91} = 1.7059$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.7059$

(13) $n = 12 \;\; , \;\; p = 0.5$

$\mu = n\,p = 12 \times 0.5 = 6$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 6$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 12 \times 0.5 \times 0.5 = 3$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 3$

$\sigma = \sqrt{3} = 1.732$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.732$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)	**(6)** (a)
(7) (b)	**(8)** (b)	**(9)** (b)	**(10)** (c)	**(11)** (b)	**(12)** (a)
(13) (d)	**(14)** (d)	**(15)** (a)	**(16)** (b)	**(17)** (c)	**(18)** (c)
(19) (b)	**(20)** (c)	**(21)** (b)			

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** $P(0 \le X \le 5) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

(b) $P(X = 3) = 0$

(c) $P(X \le 2) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(d) $P(X > 2) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(2) **(a)** $P(2 \le X \le 4) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

(b) $P(X \ge 2.5) = (4 - 2.5) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(3) **(a)** $x = 3 \quad \therefore \; y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$P(0 \le X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3} = 1$

(b) $x = 1 \quad \therefore \; y = \frac{2}{9}$

$P(X < 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

(c) $P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

(4) **(a)** المساحة تحت المنحنى (وهو منطقة مستطيلة)

$\frac{1}{6} \times (5 - (-1)) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$

$\therefore$ الدّالة هي كثافة إحتمال.

(b) لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le x \le b \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$a = -1 \; , \; b = 5$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-(-1)} = \frac{1}{6} & : \quad -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذاً f هي دالة توزيع احتمالي منتظم.

(c) $P(0 < X \le 3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

إذاً، التوقع: $2 = (\mu)$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-1))^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

إذاً، التباين $(\sigma^2) = 3$

(5) **(a)** لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le x \le b \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = 0 \ , \ b = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7-0} = \frac{1}{7} & : \quad 0 \le x \le 7 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذاً f هي دالة توزيع إحتمالي منتظم.

(b) $P\left(0 \le X \le \frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$

إذاً، التوقع: $(\mu) = \frac{7}{2}$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(7-0)^2}{12} = \frac{49}{12}$$

إذاً، التباين: $(\sigma^2) = \frac{49}{12}$

(6) **(a)** $P(z \le 2.16) = 0.98461$

(b) $P(z \ge 2.51) = 1 - P(z < 2.51) = 1 - 0.99396 = 0.00604$

(c) $P(1.5 \le z \le 2.4) = P(z \le 2.4) - P(z \le 1.5) = 0.99180 - 0.93319 = 0.05861$

(7) **(a)** $P(z \le -0.64) = 0.26109$

(b) $P(-1.7 \le z \le 2.85) = P(z \le 2.85) - P(z \le -1.7)$

$$= 0.99781 - 0.04457 = 0.95324$$

(c) $P(-1.23 \le z \le 0.68) = P(z \le 0.68) - P(z \le -1.23)$

$$= 0.75175 - 0.10935 = 0.6424$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (a)
(7) (a)	**(8)** (b)	**(9)** (a)	**(10)** (b)	**(11)** (d)	**(12)** (b)
(13) (a)	**(14)** (d)	**(15)** (c)	**(16)** (d)	**(17)** (c)	

اختبار الوحدة الثامنة

(1) $f(5) = 1 - (0.3 + 0.2 + 0.1) = 0.4$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	2	3	4	5
$f(x)$	0.3	0.2	0.1	0.4

(2) **(a)** $n(S) = {}_8C_4 = 70$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

(c) $P(X = 0) = \frac{{}_5C_4}{70} = \frac{1}{14}$

$P(X = 1) = \frac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{70} = \frac{3}{7}$

$P(X = 2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{70} = \frac{3}{7}$

$P(X = 3) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_3}{70} = \frac{1}{14}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(3) **(a)** $\mu = 3 \times \frac{2}{11} + 4 \times \frac{5}{11} + 5 \times \frac{3}{11} + 6 \times \frac{1}{11} = \frac{47}{11}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{47}{11}$

(b) $\sigma^2 = 9 \times \frac{2}{11} + 16 \times \frac{5}{11} + 25 \times \frac{3}{11} + 36 \times \frac{1}{11} - \left(\frac{47}{11}\right)^2 = \frac{90}{121}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{90}{121}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{90}{121}} = \frac{3}{11}\sqrt{10}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \frac{3}{11}\sqrt{10}$

(4) $F(1) = p(X \leq 1) = 0$

$F(2) = p(X \leq 2) = p(X < 2) + p(X = 2) = 0.14$

$F(3) = p(X \leq 3) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(3.5) = p(X \leqslant 3.5) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(4) = p(X \leq 4) = p(X = 4) + p(X < 4) = p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.65$

$F(5) = p(X \leq 5) = p(X = 5) + p(X < 5) = p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.8$

$F(6) = p(X \leq 6) = p(X = 6) + p(X < 6) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

$F(7) = p(X \leqslant 7) = p(X = 7) + p(X < 7) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

(5) $n = 1250\ ,\ p = 0.04$

(a) $\mu = n\,p = 1250 \times 0.04 = 50$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 50$

(b) $\sigma^2 = n\,p(1-p) = 1250 \times 0.04 \times 0.96 = 48$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 48$

(c) $\sigma = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 4\sqrt{3}$

(6) (a) $P(0 \le X \le 3) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(b) $P(-2 \le X \le 0) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(c) $P(X = 2) = 0$

(d) $P(-1 \le X \le 2) = (2-(-1)) \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(7) (a) $x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad y = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(8) (a) المساحة تحت منحنى الدّالة f هي: $(5-(-3)) \times \frac{1}{8} = 8 \times \frac{1}{8} = 1$

$\therefore$ الدّالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \le x \le 3) = (3-(-1)) \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 1$

$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-3))^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{16}{3}$

(9) (a) $P(z \le 2.24) = 0.98745$

(b) $P(z \ge 1.52) = 1 - P(z < 1.52) = 1 - 0.93574 = 0.06426$

(c) $P(1.4 \le z \le 2.6) = P(x \le 2.6) - P(x \le 1.4) = 0.99534 - 0.91924 = 0.0761$

(10) (a) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{30-40}{8} = -\frac{5}{4} = -1.25$

$x_2 = 65 \quad \therefore \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{65-40}{8} = \frac{25}{8} = 3.125$

$P(30 < X < 65) = P(-0.125 < z < 3.125) = P(z < 3.125) - P(z < -1.25)$

$= \frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 = 0.893465$

(b) $X = 45 \quad \therefore \quad z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{45-40}{8} = \dfrac{5}{8} = 0.625$

$P(X \geq 45) = 1 - P(X < 45) = 1 - P(z < 0.625) = 1 - \dfrac{0.73237 + 0.73565}{2}$

$= 1 - 0.73401 = 0.26599$

(11) $K = 1 - (0.16 + 0.24 + 0.15 + 0.2) = 0.25$

(12) **(a)** $P(z \leq 1.45) = 0.92647$

(b) $P(z > 0.27) = 1 - P(z \leq 0.27) = 1 - 0.60642 = 0.39358$

(c) $P(-1.32 \leq z \leq 1.75) = P(z \leq 1.75) - P(z \leq -1.32) = 0.95994 - 0.09342 = 0.86652$

(d) $P(-2.87 \leq z \leq -1.42) = P(x \leq -1.42) - P(x \leq -2.87) = 0.07780 - 0.00205 = 0.07575$

تمارين إثرائية

(1) $\sigma^2 = 25 \quad \therefore \quad \sigma = 5$

(a) $x = 55 \quad \therefore \quad z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{55-55}{5} = 0$

$P(X > 55) = 1 - P(X \leq 55) = 1 - P(z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$

(b) $x = 50 \quad \therefore \quad z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{50-55}{5} = -\dfrac{5}{5} = -1$

$P(X < 50) = P(z < -1) = 0.15866$

(c) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma} = \dfrac{30-55}{5} = -5$

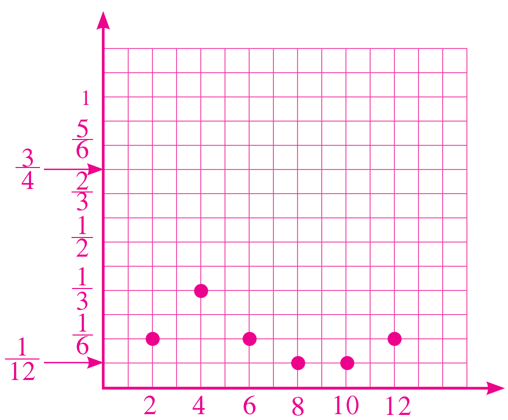
$x_2 = 40 \quad \therefore \quad z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma} = \dfrac{40-55}{5} = -3$

$P(30 < X < 40) = P(-5 < z < -3) = P(z < -3) - P(z < -5)$

$= 0.00135 - 0 = 0.00135$

(2) **(a)** $K = 1 - \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{6}$

(b)



(c) $F(2) = P(X \le 2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

$F(4) = P(X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$

$F(6) = P(X \le 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{2}{3}$

$F(8) = P(X \le 8) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) = \frac{3}{4}$

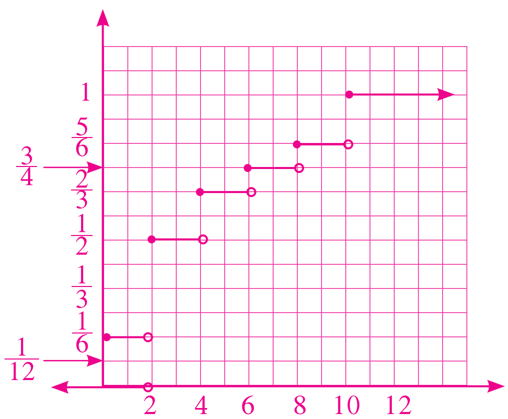
$F(10) = P(X \le 10) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) = \frac{5}{6}$

$F(12) = P(X \le 12) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12) = 1$

جدول التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	2	4	6	8	10	12
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1

(d)



(3) $\mu = 14$ $\quad\quad\quad\quad \sigma = \sqrt{1} = 1$

(a) $x = 15 \;\therefore\; z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(X > 15) = P(z > 1) = 1 - P(z \le 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$

(b) $x = 11 \;\therefore\; z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 11 - 14 = -3$

$P(X < 11) = P(z < -3) = 0.00135$

(c) $x_1 = 13 \;\therefore\; z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = 13 - 14 = -1$

$x_2 = 15 \;\therefore\; z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(13 < X < 15) = P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < -1)$

$= 0.84134 - 0.15866 = 0.68268$

(4) **(a)** $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = P\left(X \le \frac{3}{2}\right) - P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = 2$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{3}{4}$

(5) $n = 7\ ,\ p = \frac{1}{2}$

(a) $P(X = 5) = {}_7C_5 \times 0.5^5 \times 0.5^2 = 0.164$

(b) $P(X > 0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - {}_7C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^7 = 0.992$

(c) $P(X = 0) + P(X = 1) = 7.8125\,.\,10^{-3} + {}_7C_1 \times 0.5^1 \times 0.5^6 = 0.0625$

(6) **(a)** $P(z \le 2.65) = 0.99598$

(b) $P(-2.85 \le z \le -1.96) = P(z \le -1.96) - P(z \le -2.85) = 0.025 - 0.00219 = 0.02281$

(c) $P(z \ge 1.56) = 1 - P(z < 1.56) = 1 - 0.94062 = 0.05938$

(7) **(a)** $\mu = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{17}{6}$

(b) $\sigma^2 = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{12} + 25 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{59}{36}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{59}{36}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{59}{36}} = \frac{\sqrt{59}}{6}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \frac{\sqrt{59}}{6}$

(8) $F(2) = P(X \le 2) = 0$

$F(3) = P(X \le 3) = P(X < 3) + P(X = 3) = P(X = 3) = 0.17$

$F(4) = P(X \le 4) = P(X < 4) + P(X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.41$

$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5) = P(X < 4) + P(X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.41$

$F(5) = P(x \le 5) = P(X < 5) + P(X = 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.64$

$F(6) = P(X \le 6) = P(X < 6) + P(X = 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$F(6.5) = P(X \leqslant 6.5) = P(X < 6) + P(X = 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$