وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الثا ني

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي
أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية
١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ
٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

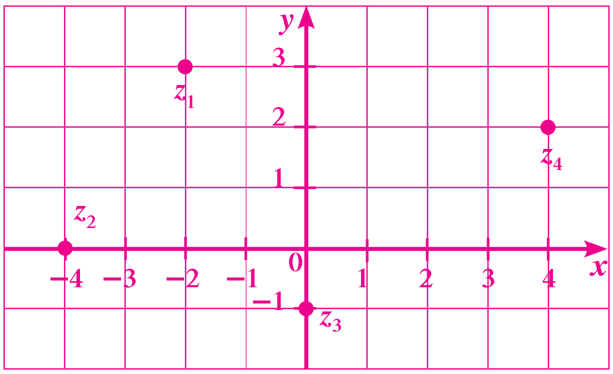
المجموعة A تمارين مقالية

(1) $4i$ (2) $i\sqrt{15}$ (3) $9i$ (4) $-5i$

(5) $2+i\sqrt{3}$ (6) $2+i$ (7) $-\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\sqrt{2}\,i$ (8) $4+\sqrt{2}\,i$

(9) $x=-7\ ,\ y=3$ (10) $x=\frac{16}{3}\ ,\ y=-\frac{19}{8}$ (11) $x=-7\ ,\ y=-8$

(12)



(13) (a) $z_1=4+5i$ (b) $z_2=-4-2i$ (c) $z_3=-2+6i$ (d) $z_4=-3i$

(14) $6+3i$ (15) $-2-3i$ (16) $10-4i$ (17) $11-5i$

(18) 10 (19) $-324i$ (20) $7-i$ (21) $9-23i$

(22) $-27+8i$ (23) -216 (24) $z=-i\ ,\ z^{27}=i\ ,\ z^{12}=1$

(25) (a) $1-\frac{4}{3}i$ (b) $-10+5i$ (c) $2+11i$

(d) $-2-11i$ (e) $5+3i$ (f) $-2-11i$

(26) $\overline{z}=-\sqrt{3}-i$

(27) (a) $\frac{-3}{13}+\frac{2}{13}i$ (b) $-\frac{1}{5}i$ (c) $\frac{-4}{25}-\frac{3}{25}i$

(28) $\overline{\frac{z_1}{z_2}}=-\frac{5}{7}-\frac{\sqrt{3}}{7}i\ ,\ \frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{7}-\frac{3\sqrt{3}}{7}i\ ,\ \left(\frac{\overline{z_1}}{z_2}\right)=-\frac{1}{7}+\frac{3\sqrt{3}}{7}i$

(29) $y=-x$ أو $y=x$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (d)

(6) (b) (7) (c) (8) (d) (9) (c) (10) (a)

(11) (c) (12) (a) (13) (d) (14) (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) 13 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 2

(2) $(1,\sqrt{3})$

(3) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $\left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

(5) $(-2,0)$

(6) $(0,-2)$

(7) $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

(8) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

(9) $(\sqrt{29}, 111.8^{\circ})$

(10) $(3,\pi)$

(11) $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$

(12) $\left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$

(13) $\left(6, +\frac{11\pi}{6}\right)$

(14) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(15) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(16) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(17) $\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$

(18) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(19) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(20) $8(\cos 0 + i\sin 0)$

(21) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$

(22) $5\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

(23) $8(\cos 30^{\circ} + i\sin 30^{\circ})$

(24) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45^{\circ} + i\sin 45^{\circ})$

(26) $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(27) $5(\cos 300^{\circ} + i\sin 300^{\circ})$

(28) $3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(29) $-\sqrt{3} - i$

(30) $1 - i$

(31) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

(32) $\frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}i$

(33) $\frac{-\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (a)
(6) (a)	(7) (d)	(8) (c)	(9) (a)	(10) (b)
(11) (b)	(12) (b)	(13) (b)		

حل معادلات

تمرَّنْ 3–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\{2-i\}$

(2) $\left\{\frac{4}{3} - i\right\}$

(3) $\left\{\frac{5}{2} - 3i\right\}$

(4) $\left\{\frac{8}{5} - \frac{16}{5}i\right\}$

(5) $\{2i, -2i\}$

(6) $\left\{\frac{5+i\sqrt{3}}{2}, \frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

(7) $\{-3+4i, -3-4i\}$

(8) $\{1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$

(9) $\{1+\sqrt{3}\,i, 1-\sqrt{3}\,i\}$

(10) $\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right) + 2 = 0$, $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2} + z_2 = -1 \Longrightarrow z_2 = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

(11) $1+2i\ ,\ -1-2i$

(12) $3+2i\ ,\ -3-2i$

(13) $3-4i\ ,\ -3+4i$

(14) $3-2i\ ,\ -3+2i$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

(6) (a) (7) (a) (8) (d) (9) (b) (10) (c)

اختبار الوحدة السابعة

(1) $-2+12i$

(2) $9-10i$

(3) $-9+i$

(4) $31+14i$

(5) $-3+7i\ ,\ \frac{3}{58}+\frac{7}{58}i$

(6) $\sqrt{53}$

(7) (a) $-3i$ (b) -1 (c) $-5-12i$

(8) $i\sqrt{5}\ ,\ -i\sqrt{5}$

(9) $\frac{9}{13}+\frac{7}{13}i\ ,\ \frac{\sqrt{130}}{13}(\cos 38^\circ + i\sin 38^\circ)$

(10) $\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}$

(11) $1+2i$

(12) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\ ,\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

(13) (a) $\frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$ (b) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ (c) $4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(14) $3\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

(15) $\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i$

(16) $1+3i\ ,\ -1-3i$

(17) (a) $4\left(-2+\frac{3}{2}i\right)^2+16\left(-2+\frac{3}{2}i\right)+25=0$

(b) $z_2=-2-\frac{3}{2}i$

تمارين إثرائية

(1) لكل هذه الأعداد المقياس نفسه = 1.

$\therefore$ تنتمي كلها إلى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 1.

(2) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$

(3) $AB=BC=CD=DA=1$ بما أن $ABCD$ رباعي جميع أضلاعه متساوية الطول لذا هو معين.

(4) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

(5) $(1+i)^2=+2i\ ,\ (1+i)^4=(+2i)^2=-4\ ,\ (1+i)^8=(-4)^2=16$

(6) $z=a+bi\ ,\ |z|=\sqrt{a^2+b^2}=1\ \therefore\ a^2+b^2=1$

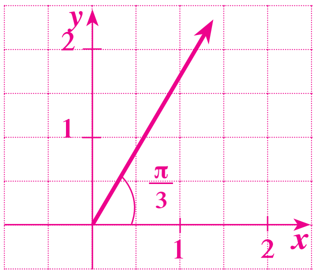
$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{\bar{z}}{1}=\bar{z}$

(7) (a) $f(1+i)=+2i(1+i)+(-2+3i)(+2i)+(13-i)(1+i)-6-10$

$$=7+7i^2=0$$

(b) باستخدام القسمة التركيبية: $f(z)=(z-1-i)[z^2+(-1+4i)z+8+2i]$

(8)



(9) (a) بالتعويض أو باستخدام القسمة.

(b) $\left\{1+i\ ,\ 1-i, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

(c) $f(z)=(z^2-2z+2)(z^2+z+1)$

(10) (a) $f(-1)=+1-6+2i+5-2i=0$

(b) باستخدام القسمة التركيبية: $-5+2i$

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل) تمرَّنْ 1–8

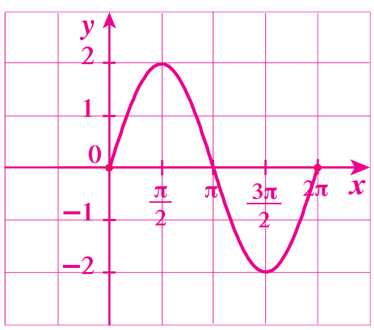
المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $2\pi, 3$ (b) $\pi, 1$ (c) $6\pi, 3$ (d) $4\pi, \frac{1}{3}$

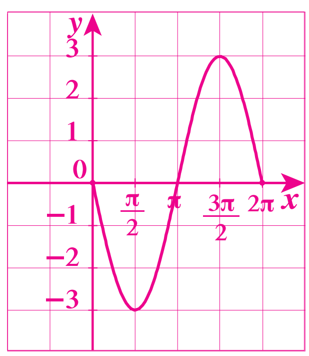
(2) (a) $y=+\sin 3x$ (b) $y=+\frac{1}{3}\sin 2x$ (c) $y=-4\sin\frac{1}{2}x$

(3) (a) $y=5\cos\frac{2}{3}x$ (b) $y=-\frac{1}{2}\cos 2x$ (c) $y=\frac{3}{5}\cos 4x$

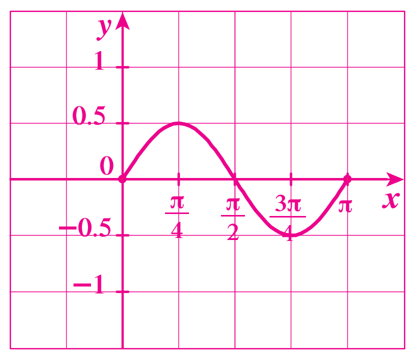
(4) (a)



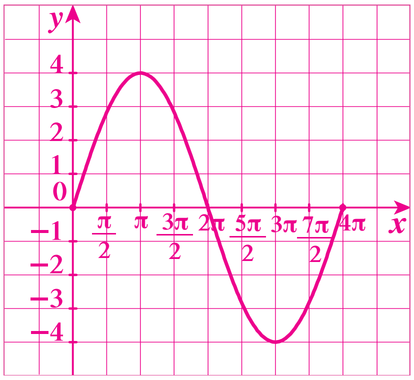
(b)



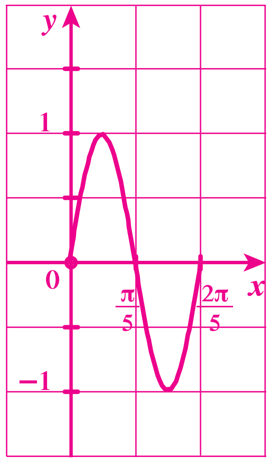
(c)



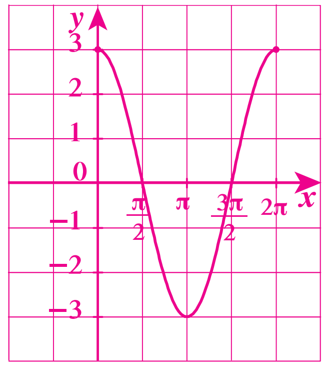
(d)



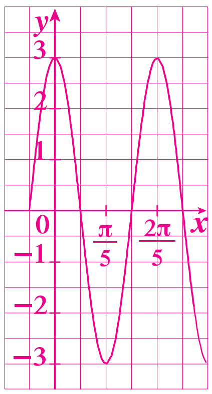
(e)



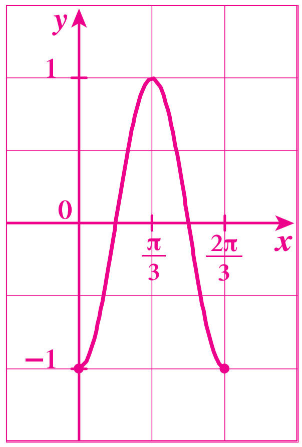
(f)



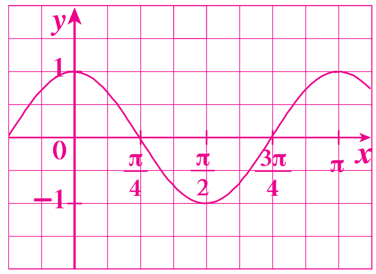
(g)



(h)



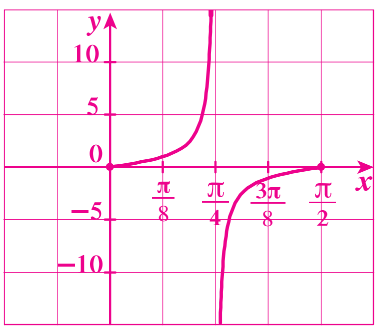
(i)



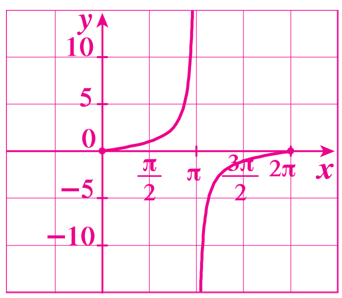
(5) (a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$

(6) (a) $y = \tan 5x$ (b) $y = \tan \frac{3}{2}x$ (c) $y = \tan 4x$

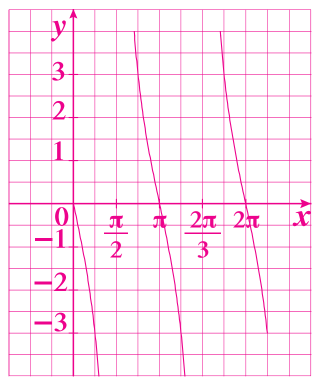
(7) (a)



(b)



(c)



المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (b) (3) (a) (4) (a) (5) (b)

(6) (b) (7) (a) (8) (b) (9) (d) (10) (a)

(11) (d) (12) (b) (13) (b) (14) (c) (15) (d)

(16) (a) (17) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) بيان الدالة h تمدد رأسي إلى أعلى بمعامل $\frac{5}{3}$ لبيان الدالة f.

(b) بيان الدالة h انكماش رأسي إلى أسفل بمعامل $\frac{2}{3}$ لبيان الدالة f وانعكاس في محور السينات.

(c) بيان الدالة h انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{3}$ لبيان الدالة f.

(d) بيان الدالة h تمدد أفقي بمعامل 5 لبيان الدالة f.

(e) بيان الدالة h انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$ وانكماش رأسي إلى الأسفل بمعامل $\frac{1}{3}$ لبيان الدالة f انعكاس في محور السينات.

(f) بيان الدالة h انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{4}$ وتمدد رأسي إلى الأعلى بمعامل 1.5 لبيان الدالة f.

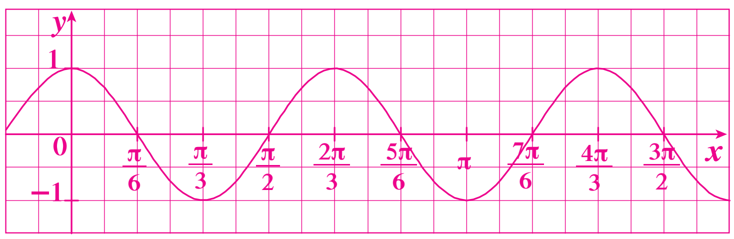
(g) بيان الدالة h إزاحة أفقية إلى اليسار $\frac{\pi}{3}$ وحدة لبيان الدالة f.

(h) بيان الدالة h إزاحة أفقية إلى اليمين $\frac{\pi}{4}$ وحدة لبيان الدالة f.

(i) بيان الدالة h إزاحة رأسية إلى الأعلى 4 وحدات لبيان الدالة f.

(j) بيان الدالة h إزاحة رأسية إلى الأسفل وحدة واحدة لبيان الدالة f.

(2) بيان الدالة y_2 هو انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{3}$ لبيان الدالة y_1.



(3) (a) بيان الدالة $y = -2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ هو إزاحة أفقية إلى اليسار $\frac{\pi}{4}$ وحدة وإزاحة رأسية إلى الأعلى وحدة واحدة وتمدد رأسي إلى الأسفل بمعامل 2 وحدة لبيان الدالة $y = \sin\theta$ وانعكاس في محور السينات.

(b) بيان الدالة $y = 3.5\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) - 1$، حيث إن $y = 3.5\cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$ هو إزاحة أفقية إلى اليمين $\frac{\pi}{4}$ وحدة وإزاحة رأسية إلى الأسفل وحدة واحدة وانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$ وتمدد رأسي إلى أعلى بمعامل 3.5 لبيان الدالة $y = \cos x$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)　(2) (a)　(3) (a)　(4) (b)　(5) (a)

(6) (a)　(7) (a)　(8) (b)　(9) (c)　(10) (d)

تمرَّنْ 3–8

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $m(\widehat{A}) = 45^\circ$, $a \approx 13.88$ cm , $b \approx 5.08$ cm

(2) $m(\widehat{C}) = 75^\circ$, $a \approx 4.53$ cm , $c \approx 5$ cm

(3) $m(\widehat{C}) = 128^\circ$, $m(\widehat{B}) = 20^\circ$, $c \approx 25.28$ cm

(4) $m(\widehat{B}) = 37^\circ$, $m(\widehat{C}) = 100^\circ$, $c \approx 46.2$ cm

(5) $m(\widehat{A}) = 78^\circ$, $m(\widehat{B}) = 34^\circ$, $b \approx 10.856$ cm

أو $m(\widehat{A}) = 102^\circ$, $m(\widehat{B}) = 10^\circ$, $b \approx 3.37$ cm

(6) $m(\widehat{A}) = 67^\circ$, $m(\widehat{C}) = 56^\circ$, $c \approx 9.9$ cm

أو $m(\widehat{A}) = 113^\circ$, $m(\widehat{C}) = 10^\circ$, $c \approx 2$ cm

(7) كلّا، هذه حالة S.A.S.

(8) نعم، $c \approx 146.128$ cm ، $m(\widehat{B}) = 32^\circ$

(9) (a) $b \approx 16.574$ m (b) $h \approx 15.76$ m

(10) (a) $a \approx 19.7$ m , $b \approx 15$ km (b) $h \approx 11.82$ km

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (c)	(5) (c)
(6) (a)	(7) (d)	(8) (c)	(9) (d)	

تمرَّنْ 4–8

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $m(\widehat{A}) = 50.6^\circ$, $m(\widehat{B}) = 104.9^\circ$, $m(\widehat{C}) = 24.5^\circ$

(2) $b \approx 19.22$, $m(\widehat{A}) = 30.7^\circ$, $m(\widehat{C}) = 18.3^\circ$

(3) $c \approx 25$, $m(\widehat{A}) = 28.6^\circ$, $m(\widehat{B}) = 56.4^\circ$

(4) $a \approx 35.4$, $m(\widehat{B}) = 38^\circ$, $m(\widehat{C}) = 60^\circ$

(5) $m(\widehat{A}) \approx 22.3^\circ$, $m(\widehat{B}) \approx 108.2^\circ$, $m(\widehat{C}) = 49.5^\circ$

(6) $m(\widehat{A}) = 24.5^\circ$, $m(\widehat{B}) = 99.2^\circ$, $m(\widehat{C}) = 56.3^\circ$

(7) $c \approx 20.74\ \text{cm}\ ,\ m(\widehat{A}) \approx 63^{\circ}\ ,\ m(\widehat{B}) \approx 32.2^{\circ}\ ,\ m(\widehat{C}) \approx 84.8^{\circ}$

(8) $c = 7.4\ ,\ m(\widehat{B}) = 60^{\circ}\ ,\ m(\widehat{C}) = 49^{\circ}$ (9) $c \approx 16.51\ \text{cm}$

(10) $AB \approx 130.4\ \text{m}$ (11) $AB \approx 841\ \text{m}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (b)

(6) (a) (7) (a) (8) (a) (9) (b) (10) (b)

مساحة المثلث تمرَّنْ 5–8

المجموعة A تمارين مقالية

(1) نستخدم قاعدة هيرون أو $a^2 = (32)^2 + (19)^2 - 2(32)(19)\cos(47^{\circ})$ $= \frac{1}{2}(32)(19)\sin\widehat{A}$ $\text{Area} \approx 222.33\ \text{cm}^2$.

(2) نطبق قاعدة هيرون أو نوجد قياس زاوية ثم نستخدم القاعدة: $\text{Area} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

$s = 8.5\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} \approx 8.18\ \text{cm}^2$

(3) $s = 10.5\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} \approx 17.4\ \text{cm}^2$ (4) $s = 27\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} \approx 113.84\ \text{cm}^2$

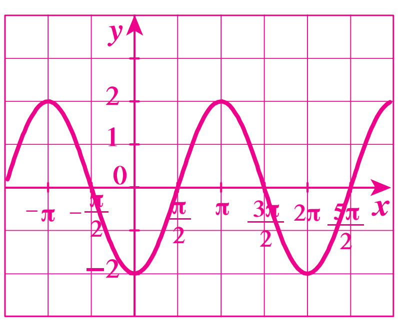
(5) $s = 36.4\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} \approx 216.15\ \text{cm}^2$ (6) $s = 23.8\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} \approx 101.34\ \text{cm}^2$

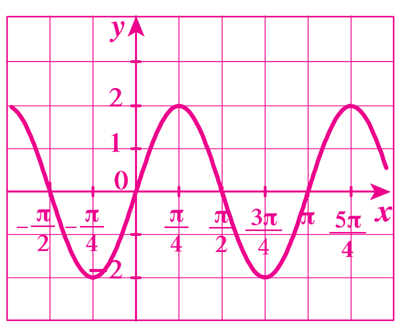
المجموعة B تمارين موضوعية

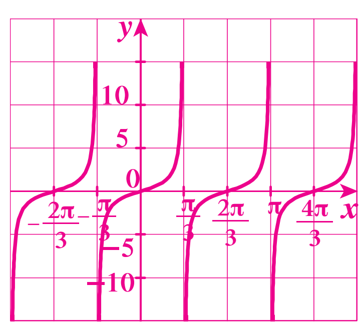
(1) (a) (2) (a) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

(6) (b) (7) (c) (8) (b) (9) (a) (10) (b)

اختبار الوحدة الثامنة

(1)


(2)


(3)


(4) $2\pi , 1.5$ (5) $4\pi , 5$ (6) $6 , 4$

(7) $\frac{2\pi}{5}$، لا يوجد سعة

(8) 6، لا يوجد سعة

(9) $y = \pm 3 \sin \frac{x}{2}$

(10) البدء من $y = \sin x$، ثم التمدد بمعامل $\frac{4}{\pi}$ أفقيًّا، التمدد بمعامل 2 رأسيًّا، الانعكاس في المحور السيني.

(11) إزاحة أفقية لِـ $\cos x$ بمقدار $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليسار.

(12) $\text{Area} \approx 4.275\ \text{cm}^2$

(13) $s = 6\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} = 6\ \text{cm}^2$

(14) $\text{Area} \approx 0.93\ \text{cm}^2$

(15) $s = 4.5\ \text{cm}\ ,\ \text{Area} \approx 2.9\ \text{cm}^2$

(16) $AB \approx 4.6\ ,\ m(\widehat{A}) = 42^\circ\ ,\ m(\widehat{B}) = 88^\circ$

(17) $m(\widehat{A}) = 29^\circ\ ,\ m(\widehat{B}) = 47^\circ\ ,\ m(\widehat{C}) = 104^\circ$

(18) $b \approx 6.37\ ,\ m(\widehat{C}) = 85^\circ\ ,\ c = 7.749$

(19) زاوية مسار الطائرتين قياسها 45° فتكون المسافة بينهما حوالي 891 km

(20) $MB \approx 37\ \text{m}\ ,\ MC \approx 48.3\ \text{m}\ ,\ MD \approx 52.26\ \text{m}$

تمارين إثرائية

(1) $3\ ,\ 2\pi\ ,\ -3\ ,\ -2$

(2) $\frac{2}{3}\ ,\ 6\pi\ ,\ 3\ ,\ 1$

(3) البدء بالدالة f، ثم انكماش أفقيّ بمعامل $\frac{1}{2}$

(4) البدء بالدالة f، ثم التمدد أفقيًّا بمعامل 2، ثم الانكماش رأسيًّا بمعامل $\frac{2}{3}$.

(5) $h \approx 18.83\ \text{m}$

(6) $r \approx 12.1\ \text{m}$

(7) في قانون الجيب: $A.S.A$ ، $S.A.A$ ، $S.S.A$، وقانون جيب التمام: $S.S.A$، $S.A.S$، $S.S.S$.

(8) $m(C\widehat{A}B) = 38^\circ$

(9) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Longrightarrow \dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\sin x$　(2) $\sin^2 x$　(3) $\tan^2 x$　(4) $\frac{1}{\sin x \cos x}$

(5) 1　(6) $\tan x$　(7) $\frac{2}{\cos^2 x}$　(8) $\frac{2}{\sin x}$

(9) $\frac{1}{\cos^3 x}$　(10) -1　(11) 1　(12) 1

(13) 1　(14) 1　(15) 1　(16) 1

(17) $\sin^2 c(1+\tan^2 c) = \sin^2 c \times \frac{1}{\cos^2 c} = \tan^2 c$

(18) $1 - 2\sin x + \sin^2 x = (1-\sin x)^2$

(19) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)　(2) (a)　(3) (b)　(4) (a)　(5) (b)

(6) (b)　(7) (d)　(8) (b)　(9) (d)　(10) (a)

إثبات صحة متطابقات مثلثية

تمرَّنْ 2–9

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \sin x \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x + \cos^2 x$

(2) $\sin x \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x + \sin^2 x$

(3) $1 - 2\tan x + \tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 2\tan x = \sec^2 x - 2\tan x$

(4) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \sec x \csc x$

(5) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos x \sin x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

(6) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2}{1-\cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$

(7) $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x + 1} = \sec x - 1 = \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1-\cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x \cot^2 x$

(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(10) $\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\tan x(\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1} = \frac{\tan x(\sec x + 1)}{\tan^2 x} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$

(11) $\dfrac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}$

$=\dfrac{\sin^2 x-(1-\sin^2 x)}{1+2\sin x\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x-1}{1+2\sin x\cos x}$

(12) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+1-\cos^2 x}{(\sin x)(1-\cos x)}=\dfrac{2(1-\cos^2 x)}{(\sin x)(1-\cos x)}=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cos x=\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x=(\sin^2 x-\sin^4 x)\cos x$

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=\sin^3 x\cos^2 x\cos x=\sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x=(\sin^3 x-\sin^5 x)\cos x$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (b) (3) (a) (4) (b) (5) (b)

(6) (d) (7) (a) (8) (c) (9) (c) (10) (a)

تمرَّنْ 3–9 حل معادلات مثلثية

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(2) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(3) $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(4) $a=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(5) $\cos x(2\sin x-1)=0\ ,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(6) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ,\ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$

(7) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(8) $x=\frac{5\pi}{4}$ أو $x=\frac{\pi}{4}$

(9) $x=\frac{7\pi}{9}$ أو $x=\frac{5\pi}{9}$ أو $x=\frac{\pi}{9}$ أو $x=\frac{17\pi}{9}$ أو $x=\frac{13\pi}{9}$ أو $x=\frac{11\pi}{9}$

(10) $x=\frac{13\pi}{8}$ أو $x=\frac{9\pi}{8}$ أو $x=\frac{5\pi}{8}$ أو $x=\frac{\pi}{8}$

(11) $x = k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(12) $\sin x = -2$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$، $\sin x = -2$ ليس لها حلول.

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (b)	(3) (b)	(4) (a)	(5) (b)
(6) (d)	(7) (d)	(8) (b)	(9) (b)	(10) (c)

متطابقات المجموع والفرق — تمرَّنْ 4–9

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 45^\circ} = -1$

(3) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{-8}{17}$

(a) $\sin 1(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \frac{13}{85}$

(b) $\cos(\beta - \gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \frac{36}{85}$

$\tan\gamma = \frac{4}{3}$, $\tan\beta = \frac{-15}{8}$

(c) $\tan(\gamma + \beta) = \frac{\tan\gamma + \tan\beta}{1 - \tan\gamma\tan\beta} = \frac{-13}{84}$

(5) $\sin(42^\circ - 17^\circ) = \sin 25^\circ$

(6) $\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{7\pi}{10}$

(7) $\tan(19^\circ + 47^\circ) = \tan 66^\circ$

(8) $\cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$

(9) $\sin(3x - x) = \sin 2x$

(10) $\tan(2y + 3x)$

(11) $\frac{\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (d)

(6) (c) (7) (c) (8) (d) (9) (b) (10) (b)

(11) (d)

تمرّنْ 5–9 متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $= \cos x(2\sin x + 1)$

(2) $= 2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

(3) $= \cos(2x + x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(4) $= 2\cos^2 2x - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

(5) $\dfrac{2}{\sin 2x} = \dfrac{2}{2\sin x\cos x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} \times \dfrac{\sin x}{\cos x} = \csc^2 x\tan x$

(6) $\sin 3x = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x = \sin x(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2(2\sin x\cos x)^2 = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

(8) $\sin 15° = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

(9) $\tan 195° = \dfrac{1 - \cos 390°}{\sin 390°} = \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$

(10) $\cos 75° = (\cos 45° + 30°) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(11) (a) $\tan x$ (b) $\tan\dfrac{x}{2}$ (c) $\tan^2\dfrac{x}{2}$

(12) $\tan x \dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{x}{2} < \pi \Longrightarrow sin\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (a)

(6) (b) (7) (c) (8) (c)

اختبار الوحدة التاسعة

(1) $\frac{1}{\cos x \sin x}$
(2) $\cos x - \sin x$
(3) 1
(4) $2\sec x$
(5) $\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$
(6) $\sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$
(7) $\tan x$
(8) $\sin x + \cos x$
(9) $2+\sqrt{3}$
(10) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
(11) $2\sin x \sin y$
(12) $\sin x - \cos x$
(13) $\sin x$
(14) (a) $\frac{11\pi}{12}$ (b) (1) $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
(15) $\frac{24}{25}$
(16) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمارين إثرائية

(1) غير متساويين
(2) غير متساويين
(3) $1+\sec x \csc x$
(4) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$
(5) 0
(6) (a) $2\cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) $2\sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

(7) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(8) $\frac{\pi}{4}+2k\pi \;,\; \frac{3\pi}{4}+2k\pi \;,\; \frac{5\pi}{4}+2k\pi \;,\; \frac{7\pi}{4}+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(9) $\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(10) $\frac{\pi}{6}+2k\pi \;,\; \frac{11\pi}{6}+2k\pi \;,\; \frac{\pi}{4}+2k\pi \;,\; \frac{7\pi}{4}+2k\pi$

(11) $\frac{3\pi}{4} \;,\; \frac{7\pi}{4} \;,\; \frac{\pi}{12} \;,\; \frac{13\pi}{12} \;,\; \frac{5\pi}{12} \;,\; \frac{17\pi}{12}$

(12) $\frac{\pi}{2}+2k\pi \;,\; \frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(13) $\sqrt{3}-2$
(14) $\cos^2 x + \cos y^2 - 1$

(15) (a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(x+30^\circ)$

(16) $4\cos(2x)$

(17) (a) $\cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \cos z - \cos x \sin y \sin z$

(b) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(18) $\pi + 2k\pi \;,\; \frac{4\pi}{3}+2k\pi \;,\; \frac{5\pi}{3}+2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

(19) $(2\cos x + 1)(\tan x - 1) = 0 \;;\; \frac{\pi}{4}+k\pi \;,\; \frac{2\pi}{3}+2k\pi \;,\; \frac{4\pi}{3}+2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

(20) $\frac{\pi}{6}+k\pi \;,\; \frac{5\pi}{6}+k\pi , \frac{\pi}{2}+k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

(21) $y = \dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x - 1}$

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x - 1}$

$\tan x = 2 + \sqrt{3}$

(22) (a) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

(b) $\tan x(\tan x \neq 0)$

(23) $2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$

(24) (a) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

(b) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(c) $\cos 4x = \cos x \Longrightarrow x = \dfrac{2\pi}{5}\ ,\ x = \dfrac{4\pi}{5}$

(25) $\cos 18^{\circ} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$\sin 36^{\circ} = \dfrac{1}{8}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$\sin 9^{\circ} = \dfrac{1}{4}\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

(26) $m(B\widehat{A}M) = m(M\widehat{A}C) = \alpha$

(a) $\sin\alpha = \dfrac{BM}{AB} \Longrightarrow a = 2b\sin\alpha$

(b) $m(D\widehat{C}B) = \alpha$

(c) $\cos\alpha = \dfrac{CD}{BC} \Longrightarrow CD = 2b\sin\alpha\cos\alpha$

(d) $\text{Area}(ABC) = b^2 \sin\alpha\cos\alpha$

(e) $\text{Area}(ABC) = \dfrac{1}{2}b^2\sin(2\alpha)$

(f) $\dfrac{1}{2}b^2\sin(2\alpha) = b^2\sin\alpha\cos\alpha \Longrightarrow \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

المستقيمات والمستويات في الفضاء تمرَّنْ 1–10

المجموعة A تمارين مقالية

(1) كلّا، المستقيم يمكن أن يكون موجودًا في أكثر من مستوٍ واحدٍ.

(2) كلّا، النقطة تنتمي إلى عدد لا ينتهي من المستويات.

(3) نعم، مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

(4) نعم، فالشكل $EFGH$ شبه منحرف يعيّن مستوي واحد فقط (يوجد مستقيمان متوازيان).

(5) نعم، فالشكل EGA مثلث يعيّن مستوي واحد فقط.

(6) المستويات الأربعة هي: $(ABC), (BCD), (ADB), (ACD)$.

(7) $\because\ E \in \overleftrightarrow{AC}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \subset (ABC)$

$\therefore\ E \in (ABC)$

$\because\ E \in \overleftrightarrow{AC}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \subset (ADC)$

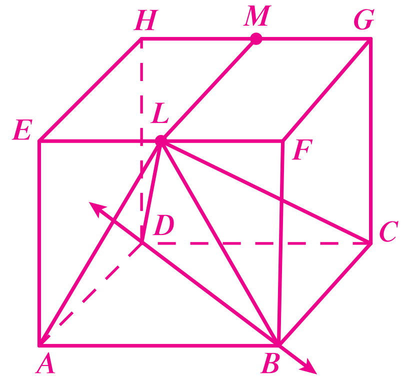
$\therefore\ E \in (ADC)$

(8) (a) النقطة B.

(b) المستقيم l الذي يمر بالنقطتين A، B.

(c) المستقيم l.

(9)

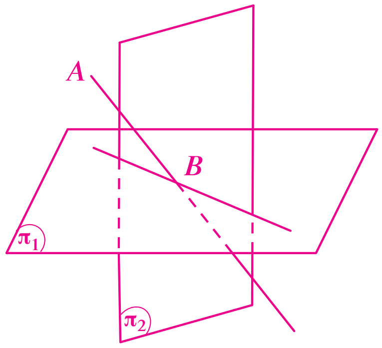


(a) $(AGH) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{AB}$

(b) $(BFH) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{BD}$

(c) $(ADL) \cap (BCL) = \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

(10)



(11) (a) $\overleftrightarrow{AB} \cap (BCD) = \{B\}$

(b) $\overleftrightarrow{AB} \cap (ACD) = \{A\}$

(c) $(ABC) \cap (BCD) = \overleftrightarrow{BC}$

(12) (a) $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{ND} = \{D\}$

(b) $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = \phi$ (متوازيان)

(c) $\overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{ML} = \phi$ (متخالفان)

(d) $\overleftrightarrow{ML} \cap (ABLK) = \{L\}$

(e) $\overleftrightarrow{BD}$

(f) $\overleftrightarrow{ND} \,/\!/\, \overleftrightarrow{BL}$ (يشكلان مستويًا)

(g) لا يشكّلان مستويًا لأنّهما مستقيمان متخالفان.

(h) $\because\ (CMN)=(DCMN),(ADK)=(ADNK)$

فهما يتقاطعان في $\overleftrightarrow{DN}$

(13) (a) $\because\ M \in \overleftrightarrow{AB}\ ,\ \overleftrightarrow{AB} \subset (ABC) \Longrightarrow M \in (ABC)$

$\because\ L \in \overleftrightarrow{AC}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \subset (ABC) \Longrightarrow L \in (ABC)$

$\therefore\ \overleftrightarrow{ML} \subset (ABC)$

(b) $\because$ $\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ينتميان إلى (ABC) وهما مستقيمان غير متوازيين $\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{K\}$

(c) $\because\ \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{K\}\ \ \therefore\ \overleftrightarrow{ML} \cap (BCD) = \{K\}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

(6) (a) (7) (c)

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء تمرَّنْ 2–10

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $\because\ (\overleftrightarrow{AK}) \,/\!/\, \overleftrightarrow{BL}\ ,\overleftrightarrow{CM} \,/\!/\, \overleftrightarrow{BL}\ \ \therefore\ \overleftrightarrow{AK} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CM}$

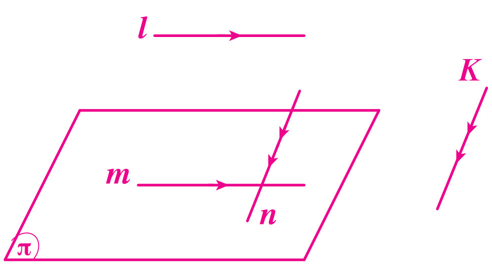
(b) $\overleftrightarrow{AK} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CM}$ (المستقيمان المتوازيان يعينان مستويًا)

(c) $\because\ \overleftrightarrow{AD} \,/\!/\, \overleftrightarrow{KN}\ ,\ \overleftrightarrow{KN} \subset (MKN) \Longrightarrow \overleftrightarrow{AD} \,/\!/\, (MKN)$

(2) (a) يكون $\overleftrightarrow{\ell}$ موازيًا للمستوى π إذا كان موازيًا لمستقيم ينتمي إلى π.

أو $\overleftrightarrow{\ell}$ محتوى في π.

(b) انظر الرسم: $\overleftrightarrow{k} \,/\!/\, \overleftrightarrow{n}$ ، $\overleftrightarrow{n} \subset \pi$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{k} \,/\!/\, \pi$

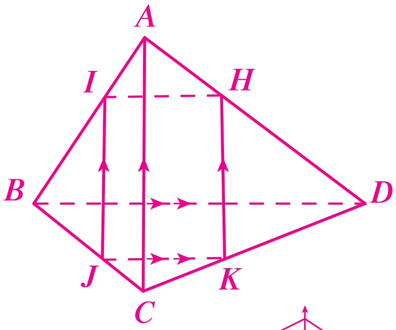


(3) في المثلث SAB، لدينا $\overleftrightarrow{ML} \,/\!/\, \overleftrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{ML} \,/\!/\, (ABCD)$

(4) في المكعب $EACG$ متوازي أضلاع $\therefore$ $\overleftrightarrow{EG} \,/\!/\, \overleftrightarrow{AC}$ ومنه $\overleftrightarrow{EG} \,/\!/\, (ABCD)$ وتقاطع (GEM) مع $(ABCD)$ هو $\overleftrightarrow{MN}$ بحيث أن $\overleftrightarrow{MN} \,/\!/\, \overleftrightarrow{EG}$

(5) (a) $\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{CD} \subset (SCD) \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (SCD)$

(b) (ABM) يمر بالمستقيم AB $\quad (ABM) = (ABMN) \quad \because$ $\quad \therefore$ (ABM) يتقاطع مع (SDC) بالمستقيم MN حيث
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ ولكن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ فيكون $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

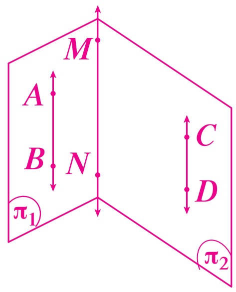


(6) (a) انظر الرسم.

(b) $\because \overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{IJ} \quad \therefore \overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$ وبالتالي $IJKH$ هو مستوي

ولكن $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{JK}$ فيكون $(ABD) \parallel \overleftrightarrow{JK}$ وبالتالي:

$\overleftrightarrow{IH} = (ABD) \cap (IJKH)$ ويكون: $\overleftrightarrow{JK} \parallel \overleftrightarrow{IH}$ ومنه $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{IH}$.

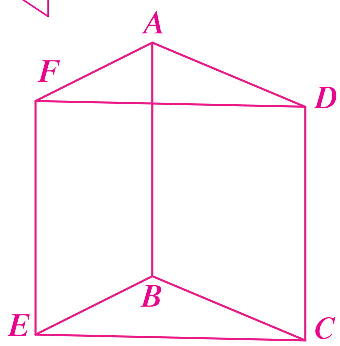


(7) إذا وازى مستقيم مستويًا فكل مستو يمر بهذا المستقيم يقطع المستوي بمستقيم يكون موازيًا للمستقيم المعطى لذا:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

فيكون $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



(8) $\because \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}, \ EF = AB$

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}, \ CD = AB$

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}, \ CD = EF$

ومنه $CDFE$ متوازي الأضلاع.

(9) $\because \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ يتقاطعان $\quad \therefore$ يشكلان مستويًا وهذا المستوي يقطع المستويين المتوازيين π_1، π_2 بمستقيمين متوازيين فيكون $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ وبالتالي المثلثان: MAC، MBD متشابهان.

ومنه نستنتج: $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AM}{MB}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (b) (3) (b) (4) (b) (5) (a)

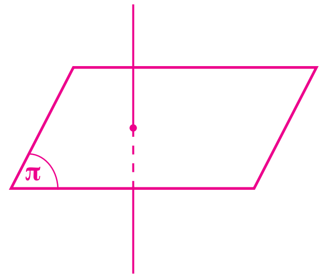
(6) (c) (7) (d) (8) (c)

تعامد مستقيم مع مستوٍ تمرَّنْ 3–10

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) إذا كان المستقيم عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي.

(b)



(2) (a) $\overleftrightarrow{EH}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{FG}$

(b) $(BCDA)$ و $(FGHE)$

(c) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DH}$، إذًا $\overleftrightarrow{AD} \perp (CGH)$

(3) (a) BCD مثلث متطابق الضلعين في C. إذًا $\overleftrightarrow{CM}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$ أيضًا المثلث ABD متطابق الضلعين في A إذًا $\overleftrightarrow{AM}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{BD}$ بما أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CM}$، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AM}$ فيكون: $\overleftrightarrow{BD} \perp (ACM)$.

(b) $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$ إذًا $\overleftrightarrow{BD}$ متعامد مع كل المستقيمات التي تنتمي إلى (AMC)، خاصة $\overleftrightarrow{AC}$.

(4) $\overleftrightarrow{AO}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{BC}$ في منتصف $\overleftrightarrow{BC}$ (O مركز ABC)

ABC مثلث متطابق الأضلاع، إذًا $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AO}$، ثمّ $\overleftrightarrow{MO} \perp (AMC)$ لذا $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MO}$ فيكون: $\overleftrightarrow{BC} \perp (AOM)$.

(5) في المثلث ABC لدينا $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{FD}$ ولكن $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ فيكون $\overleftrightarrow{FD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ كما أن $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ لذا $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ في النقطة D.

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ $\therefore$ $\pi_1 \parallel \pi_2$.

(6) لدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AP}{AD} = \frac{1}{3}$ وبالتالي المثلثان MNP، BCD يقعان في مستويين متوازيين، $\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (MNP)$ في النقطة M.

(7) في المثلث SBC لدينا: $SB^2 = 100$، $SC^2 + BC^2 = 100$ وبالتالي SBC قائم الزاوية في C.

$\because$ $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{BC}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{SC} \perp (ABC)$ ولكن $(EFG) \parallel (ABC)$ فيكون $\overleftrightarrow{SC} \perp (EFG)$ ومنه $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{EF}$.

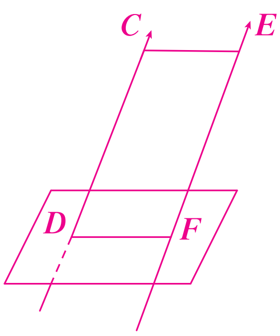
(8) $\because$ $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$ عموديان على المستوي π فهما متوازيان $\therefore$ $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{CD}$

يشكلان مستويًا، $\because$ $\overleftrightarrow{CE} \parallel \pi$ فيكون تقاطع $(CDEF)$

مع π هو $\overleftrightarrow{DF}$ بحيث $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{DF}$.

ومنه $CDFE$ متوازي أضلاع ولكن $\overleftrightarrow{CD} \perp \pi$ فيكون $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DF}$

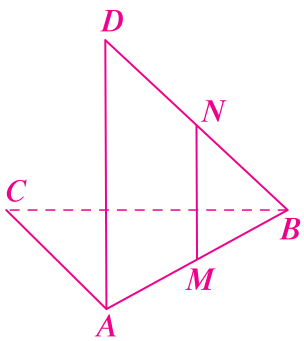
وبالتالي $CDFE$ مستطيل.



(9) $\because$ $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore$

$\overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$ وفي المثلث ABD

لدينا $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$



(10) $\because$ $\overleftrightarrow{CA} \perp \overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CA} \perp \overleftrightarrow{AD}$ $\therefore$

$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$ ولكن $\overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{ED}$ فيكون $\overleftrightarrow{ED} \perp (ABD)$ ومنه $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(11) $\because$ $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{LM}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BL}$ و $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ومنه $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (b)
(6) (b)	(7) (c)	(8) (b)	(9) (b)	

الزاوية الزوجية — تمرَّنْ 4–10

المجموعة A تمارين مقالية

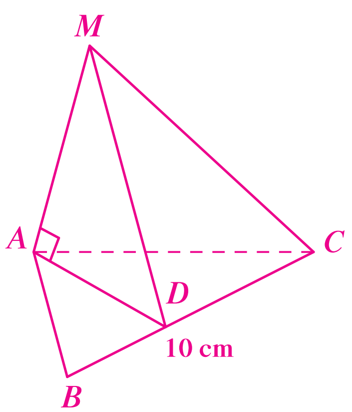
(1) (a) ∵ $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ ومنه: ∴ $\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$.

(b) $\widehat{AMD}$

(c) $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $\tan(\widehat{AMD}) = 1$, $(\widehat{AMD}) = 45^{\circ}$

(2) $m(B\hat{A}C) = 60^{\circ}$

(3) ∵ $\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$ ∴ $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ولدينا $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ فتكون الزاوية الزوجية $(ABCD), (FCD)$ هي BEF ولكن المثلث FBE قائم الزاوية في B ومتطابق الضلعين $(FB = EB)$ لذا: $m(B\hat{E}F) = 45^{\circ}$.



(4) (a) ∵ $m(M\hat{A}B) = m(M\hat{A}C) = 90^{\circ}$ ∴ $\overleftrightarrow{AM} \perp (ABC)$

ومنه: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ كما أن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ فيكون $\overleftrightarrow{BC} \perp (MAD)$

(b) الزاوية الزوجية هي ADM لأن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ثم $\overleftrightarrow{MD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

والمثلث MAD قائم الزاوية في A.

لدينا $MA = 5\text{ cm}$، $AD = 5\sqrt{3}$ وبالتالي: $\tan(ADM) = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$

أي $m(A\hat{D}M) = 60^{\circ}$

(5) (a) في المثلث DBC لدينا $\overleftrightarrow{MI} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ لذا $\overleftrightarrow{MI} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ثم $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$ لذا $\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ نستنتج $\overleftrightarrow{CD} \perp (SMI)$ ومنه $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{SI}$ وبالتالي $M\hat{I}S$ هي الزاوية الزوجية للمستويين $SCD, ABCD$.

(b) المثلث SMI قائم الزاوية في M حيث $SM = \sqrt{3}\text{ cm}$، $MI = 3\text{ cm}$ لذا $\tan(MIS) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ومنه $m(S\hat{I}M) = 30^{\circ}$.

(6) ∵ $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{SM}$، $\overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{SM}$ ∴ $B\hat{M}C$ هي الزاوية الزوجية وبالتالي $m(B\hat{M}C) = 120^{\circ}$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (a)
(6) (d)	(7) (c)	(8) (c)	(9) (c)	(10) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) النقاط O, M, B, A تنتمي إلى نفس المستوى. $\overleftrightarrow{CO}$ متعامد مع المستوي (OAB). إذًا $(OAB) \perp (COM)$

(b) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OC}$، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OM}$ وبالتالي $\overleftrightarrow{AB} \perp (CMO)$ ومن ثم $(CAB) \perp (COM)$

(2) (a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DH}$ وبالتالي $\overleftrightarrow{AB} \perp (ACD)$

(b) لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp (ACD)$

(c) $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AD}$، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$، لذا: $\overleftrightarrow{CD} \perp (ABD)$

(d) بما أن (CDB) يحوي $\overleftrightarrow{DC}$، لذا: $(CDB) \perp (ABD)$

(3) (a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ ومنه: $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$، إذًا $(FBCG) \perp (ABCD)$

(b) $AC = AF = FC = a\sqrt{2}$ (أوتار المربّعات متساوية).

(c) لأنّ ACF متطابق الأضلاع لذا $\overleftrightarrow{AM}$ عمود في المثلث ACF.

(d) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$ لذا $(ABG) \perp (BCGF)$

(e) $\overleftrightarrow{FC} \perp \overleftrightarrow{BG}$ و $\overleftrightarrow{FC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ فيكون $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABG)$

(4) إذا تعامد مستويان على نفس المستقيم فهما متوازيان وكل مستوٍ يقطع أحدهما فهو يقطع الآخر والتقاطع هما مستقيمان متوازيان لذا تقاطع (CAD) مع المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{CA}$ هو مستقيم يمر بالنقطة I ويوازي $\overleftrightarrow{AD}$ لذا يمر في منتصف $\overline{CD}$ كما أن تقاطع (CAB) مع المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{CA}$ هو مستقيم يمر بالنقطة I ويوازي $\overleftrightarrow{AB}$ لذا يمر في منتصف $\overline{CB}$.

(5) (a) $ED = DB = EB = 5\sqrt{3}$ cm

(b) $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{EI}$ و $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AE}$ فيكون $(AEI) \perp (DBG)$.

(6) (a) $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{MA}$ و $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{IA}$ فيكون $(IMB) \perp (IAM)$.

(b) $\overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{BM}$ (نتيجة من a)، $\overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{IM}$ فيكون $\overleftrightarrow{AH} \perp (IMB)$ وبالتالي: $(IMB) \perp (AHK)$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (a) (5) (a)
(6) (b) (7) (a) (8) (c) (9) (b) (10) (b)
(11) (b) (12) (b)

اختبار الوحدة العاشرة

(1) (a) لا، ثلاث نقاط على استقامة واحدة لا تعين مستويًا واحدًا.

(b) نعم، $\overleftrightarrow{GH}$ ،$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيمان متوازيان يحدّدان مستويًا واحدًا.

(c) (ABD)، (EFM)، (ABG).

(2) (a) $\overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

(b) $(ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$

(c) $(CNB) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{BN}$

(3) (a) $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

إذًا $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(b) في شبه المكعّب $ABCDEFGH$ لدينا:

$\overleftrightarrow{FB} \parallel \overleftrightarrow{HD}$ و $FB = HD$ لذا $HDBF$ متوازي أضلاع ولكن $\overline{HD} \perp \overline{DB}$ لذا $HDBF$ هو مستطيل.

(c) بما أن $\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{HF}$، لذا $\overleftrightarrow{HF} \parallel (ABCD)$

(4) (a) في المكعّب، نعلم أنّ: $\overleftrightarrow{GD} \parallel \overleftrightarrow{EB}$، إذًا يعينان المستوي $(EGDB)$

(b) $(BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{IO}$

(c) لدينا $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{AH}$ و $FC = AH$

I منتصف $\overline{HF}$ و O منتصف $\overline{AC}$

$\overleftrightarrow{IO}$ ينتمي إلى $(BEGD)$ وإلى $(ACFH)$ وهما يمران في مستقيمين متوازيين إذًا $\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{IO} \parallel \overleftrightarrow{AH}$

(5) (a) في المثلث ACD، $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{KN}$ و $KN = \frac{AC}{2}$ (نظرية المنتصفات في المثلث).

في المثلث ABC، $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$ و $LM = \frac{AC}{2}$، إذًا $\overleftrightarrow{KN} \parallel \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

(b) $\overleftrightarrow{KN} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

في المثلث ABD، $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{LK}$ و $LK = \frac{BD}{2}$

في المثلث BCD: $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$، $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{LK}$ و $MN = \frac{BD}{2}$

إذًا $KLMN$ متوازي الأضلاع لأنّ: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{KL}$ و $KL = MN$ و $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{KN}$ و $KN = LM$

(c) لأنّ $KLMN$ متوازي الأضلاع إذًا القطران يتقاطعان.

(6) في شبه المكعّب $ABCDEFGH$، إذ $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GF}$، $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GC}$، $\overleftrightarrow{HG} \perp (BFGC)$ و $\overleftrightarrow{HG}$ متعامد مع جميع مستقيمات $(BFGC)$، خاصة $\overleftrightarrow{BG}$

(7) في المثلثين ABC و ABD لدينا: $BC = BD$ ؛ $\overleftrightarrow{AB}$ ضلع مشترك، و $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$
إذًا $ABC\Delta$ و $ABD\Delta$ متطابقان (SAS) و $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADB})$

(8) (a) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ إذًا $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{BM}$ (لأن المثلث $\widehat{BCD}$ متطابق الأضلاع)
إذًا $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$

(b) $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$ إذًا $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(9) (a) في المثلث SCD، $\overleftrightarrow{MN}$ يمر بمنتصف $\overleftrightarrow{SC}$، $\overleftrightarrow{SD}$ لذا $\overleftrightarrow{MN} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$ وبالتالي $\overleftrightarrow{MN} /\!/ (BCD)$.

(b) إذا وازى مستقيم مستويًا فكل مستو يمر بهذا المستقيم يقطع المستوى بمستقيم يكون موازيًا للمستقيم المعطى وبالتالي:
$\overleftrightarrow{PL} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$

(10) (a) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{IJ}$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{JM}$ فيكون $\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$

(b) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AE}$ فيكون $\overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

(c) (IJM) و (AEB) متعامدان على $\overleftrightarrow{AD}$ لذا فهما متوازيان.

(d) $m(\widehat{IJM}) = m(\widehat{CDH}) = 90^\circ$ لذا $\overleftrightarrow{IJ} \perp \overleftrightarrow{JM}$ و $\overleftrightarrow{IJ} \perp \overleftrightarrow{AD}$ فيكون $\overleftrightarrow{IJ} \perp (ADHE)$

(11) (a) بما أن $\overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1$ فيكون $(AIJ) \perp \pi_1$ وبما أن: $\overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2$ فيكون $(AIJ) \perp \pi_2$

(b) بما أن $\overleftrightarrow{AI} \perp \vec{d}$، $\overleftrightarrow{AJ} \perp \vec{d}$ لذا $\vec{d} \perp (AIJ)$

(c) بما أن $\vec{d} \perp (AIJ)$، لذا $\vec{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

تمارين إثرائية

(1) النقاط O, D, A تنتمي إلى كل من المستويين $(ADHE)$، $(ABCD)$ وبالتالي O, D, A تقع على استقامة واحدة.

(2) (a) L تنتمي إلى $\overleftrightarrow{CD}$ إذًا تنتمي إلى (CDM). والمستوي (ABL) يحتوي على النقاط L, B, A

(b) $(ABL) \cap (CDM) = \overleftrightarrow{LM}$

(3) (a) بما أن $\frac{OG}{OA} = \frac{OM}{OX} = 1$، لذا O منتصف $\overline{AG}$.

(b) بما أن $\frac{FA}{FE} = \frac{EX}{FY} = 1$، لذا O هي منتصف $\overline{AE}$.

(c) في المثلث AGE، $\overline{OF}$ يجمع منتصفي $\overline{AG}$، $\overline{AE}$ لذا $\overleftrightarrow{GE} /\!/ \overleftrightarrow{OF}$.

(d) $\overleftrightarrow{GE} /\!/ \overleftrightarrow{OF}$ ولكن $\overleftrightarrow{OF} \subset (XYHM)$ لذا $\overleftrightarrow{GE} /\!/ (XYHM)$.

(4) (a) بما أن $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ لذا $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

(b) بما أن $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$ لذا $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

(c) بما أن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ لذا $\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$

(5) (a) $E \in (ABC) \cap (YFG)$ ثم $X \in (ABC) \cap (YFG)$ فيكون $\overleftrightarrow{XE} = (ABC) \cap (YFG)$

(b) إذا تقاطع مستويان يمران بمستقيمن متوازيين فيكون تقاطعهما مستقيمًا موازيًا للمستقيمين لذا $\overleftrightarrow{XE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{FG}$

(6) (a) بما أن $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{AD}$ فيكون $\overleftrightarrow{CF} \perp (BAD)$.

(b) بما أن $\overleftrightarrow{CF} \perp (ABD)$ لذا $\overleftrightarrow{CF} \perp \overleftrightarrow{BD}$.

(c) بما أن $\overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$ لذا $(ABC) \perp (ABD)$.

(d) بما أن $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CF}$ ، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{FE}$ لذا $\overleftrightarrow{BD} \perp (EFC)$ ومنه $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CE}$

(e) المثلث CFE قائم الزاوية في F والزاوية الزوجية هي $\widehat{FEC}$ لذا $\text{Cos}(\widehat{FEC}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ومنه: $m(FEC) \approx 48^\circ 11' 23''$

مبدأ العد والتباديل والتوافيق — تمرَّنْ 1–11

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $6^4 = 1296$ (b) $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ (c) $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$

(2) (a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (b) $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (c) $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$

(3) 6 طرق بأربع خطوات لكل منها.

(4) (a) $4! - 1 = 23$ (نطرح 1 الذي يمثل ترتيب الإطارات قبل التبديل)

(b) $5! - 1 = 119$

(5) (a) ${}_8P_1 = 8$ (b) ${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$

(c) ${}_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ (d) ${}_9P_6 = 60\,480$

(6) $15! = 1\,307\,674\,368\,000$ (7) $4 \times 3 = 12$

(8) (a) $n = 8$ (b) $r = 3$ (c) $n = 12$

(9) ${}_8P_3 = 336$

(10) (a) ${}_6C_2 = 15$ (b) ${}_7C_3 \times {}_9C_3 = 4\,410$

(c) ${}_4C_4 = 1$ (d) ${}_6C_2 + {}_6C_3 = 15 + 20 = 35$

(11) ${}_{300}C_4 = 330\ 971\ 175$ (12) ${}_{10}C_4 = 210$

(13) ${}_1C_1 \times {}_{15}C_{10} = 3\,003$ (14) ${}_{25}C_2 + {}_{25}C_3 = 300 + 2\,300 = 2\,600$

(15) (a) ${}_8C_3 = 56$ (b) ${}_8C_5 = 56$ (c) الخاصية ${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$

(16) $51\,563\,424$

(17) (a) $n = 17$ (b) $n = 6$ (c) $n = 7$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (b)
(6) (c)	(7) (a)	(8) (c)	(9) (a)	(10) (b)
(11) (d)	(12) (b)	(13) (c)	(14) (b)	(15) (c)

نظرية ذات الحدين — تمرَّنْ 2–11

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(b) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

(c) $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$

(2) (a) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

(b) $x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$

(c) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

(3) (a) $243x^5-405x^4y+270x^3y^2-90x^2y^3+15xy^4-y^5$

(b) $x^8+4x^6y+6x^4y^2+4x^2y^3+y^4$

(c) $27x^3+135x^2y+225xy^2+125y^3$

(4) $594\,x^{10}$ (5) $27x^8$ (6) x^{11}

(7) $-823\ 680\,x^8y^7$ (8) $29\,568\,x^{10}y^6$

(9) يجب أن يكون (أس y) = 5، لأن (أس y) هو [(أس x) – 7].

(10) $-30\ 870\,x^2y^3$ (11) $-590\ 625\,a^3b^3$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (b)	(5) (b)
(6) (d)	(7) (d)	(8) (b)	(9) (c)	(10) (b)
(11) (d)				

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ليسا متنافيين. مثال: $3 = 1 + 2$ عدد أولي أصغر من 4.

(2) متنافيان. $24 = 6 \times 4$، 4، 6 ليسا عددين أوليين.

(3) (a) 15% (b) 44% (c) 70% (d) 76% (4) $\frac{6}{37}$

(5) (a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{8}{15}$ (c) $\frac{7}{15}$

(6)

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{2x}$

(7) (a) $\frac{3}{4}$ (b) 39%

(8) (a) $\frac{1}{6}$ (b) 0.54

(9) $\frac{30}{100} + \frac{17}{100} = \frac{47}{100} = 0.47$

(10) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{5}{6}$

(11) ${}_{10}C_4(0.40)^4 \times (0.60)^6 \approx 0.25$

(12) ${}_{30}C_4(0.11)^4 \times (0.89)^{26} \approx 0.1939$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (a) (5) (c)

(6) (b) (7) (d) (8) (b) (9) (d) (10) (a)

(11) (c)

اختبار الوحدة الحادية عشرة

(1) توفيقة. $_{11}C_5 = 462$ (2) توفيقة. $_{15}C_3 = 455$ (3) تبديلًا. $_5P_5 = 5! = 120$

(4) $1 - 8t + 24t^2 - 32t^3 + 16t^4$ (5) 7 (6) ≈ 0.0172

(7) متنافيان؛ $\frac{5}{18}$ (8) غير متنافيين؛ $\frac{4}{9}$

(9) (a) كلّا، 96 من مضاعفات العدد 3 والعدد 4.

(b) $\frac{1}{10}$ (c) $\frac{1}{2}$

(10) $_{10}C_4(0.2)^4 \times (0.8)^6 \simeq 0.088$ (11) $_8C_3(0.6)^3 \times (0.4)^5 \approx 0.124$

(12) (a) 0.3087 (b) 0.47178

تمارين إثرائية

(1) (a) $_{12}C_{12}(0.9)^{12} \times (0.1)^0 \approx 0.2824$

(b) $_{12}C_{10}(0.9)^{10} \times (0.1)^2 + {}_{12}C_{11}(0.9)^{11} \times (0.1)^1 + {}_{12}C_{12}(0.9)^{12} \times (0.1)^0 \approx 0.8891$

(c) ≈ 0.1109 (($P - 1$ (على الأقل 10 ثمرات...

(2) (a) كل كلمة مكونة من 10 أحرف وكل حرف يمكن اختياره من بين 3 أحرف: 3^{10}

(b) (i) 3^9

(ii) 3^7

(iii) 3^9

(iv) يمكن ترتيب الخانات الثلاث الأولى بـ !3 طريقة، ويبقى 3^7 لبقية الخانات أي $3! \times 3^7$

(c) (i) كل الكلمات (3^{10}) ما عدا الكلمات التي لا تتضمن الحرف A، (2^{10}) $\therefore$ $3^{10} - 2^{10} = 58\,025$

(ii) هناك $_{10}C_4$ لاختيار خانات الحرف B ونكمل البقية بـ 2^6 $\therefore$ $_{10}C_4 \times 2^6 = 13\,440$

(iii) $10 \times 2^9 + 2^{10} = 6\,144$

(3) (a) $4 \times 10^3 = 4\,000$

(b) $1 \times 10 \times 9 \times 8 = 720$

(c) $4 \times 10 \times 10 \times 5 = 2\,000$

(d) $1 \times (10^3 - 7^3) = 637$

(4) $\frac{1}{_9P_4} = \frac{1}{3\,024}$

(5) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = 5n(n-1)$

$n(n-1)\left[\frac{n-2}{6} + \frac{1}{2} - 5\right] = 0 \quad \therefore \quad n = 29$

(6) هناك !20 طريقة لتوزيع أجزاء الموسوعة

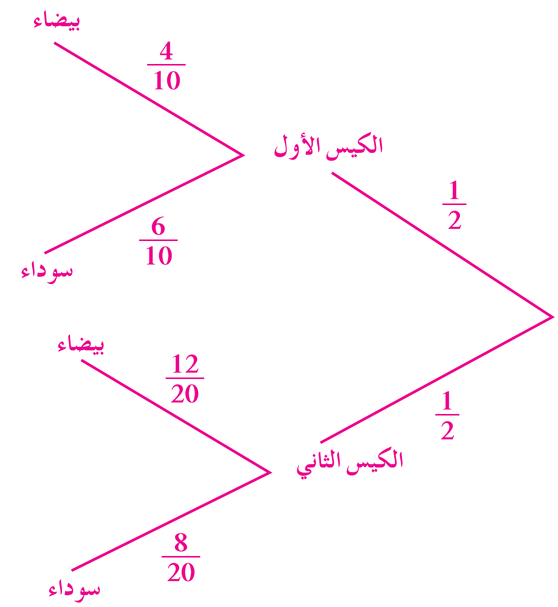
!18 طريقة لتوزيع بقية الأجزاء

19 مكانًا للجزء 2 ويمكن تبديل موقع الجزءين 1, 2

$$P = \frac{18! \times 19 \times 2}{20!} = \frac{1}{10}$$

(7) (a) 5 (b) 2 (c) $(0.15)^5 \approx 0.000076$

(8)



$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{20} = \frac{1}{2}$$

(9) ${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.3125$

$\therefore$ القطعة غير معدّلة

(10) (a) 19 (b) 23

(c) كلّا، لأن 40 مثلًا هو من مضاعفات كل من العددين 4، 5

(11) (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$