

القسم الأول : أسئلة المقال :

أجب عن الأسئلة التالية موضحاً خطوات الحل في كل منها :

السؤال الأول :

14

(a) أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة للمستوية دورة كاملة حول

$$f(x) = x^2 + 2 \quad : \quad f$$

(8 درجات)

ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$

الحل

∴ حجم الجسم الناتج عن الدوران هو :

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$$

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^1 (x^2 + 2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 4x^2 + 4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x \right]_{-1}^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{4}{3} - 4 \right) \right]$$

$$= \frac{166}{15} \pi \text{ units cube}$$



(تراجعى جميع الإجابات الصحيحة الأخرى لجميع الأسئلة)

تابع السؤال الأول:

(b) أوجد :

(6 درجات)

$$\int (2x + 1) \ln x \, dx$$

الحل

$$u = \ln(x)$$

$$dv = (2x + 1) \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$v = x^2 + x$$

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\int (2x + 1) \ln(x) \, dx = (x^2 + x) \ln(x) - \int \frac{x^2 + x}{x} \, dx$$

$$= (x^2 + x) \ln(x) - \int \frac{x(x + 1)}{x} \, dx$$

$$= (x^2 + x) \ln(x) - \int (x + 1) \, dx$$

$$= (x^2 + x) \ln x - \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) + C$$

$$= (x^2 + x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 - x + C$$



السؤال الثاني

(a) أوجد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$$

(6 درجات)

الحل

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{عندما}$$

$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{عندما}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^1 u \, du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$



تابع السؤال الثاني :

(b) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $3x^2$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(1, 5)$ (8 درجات)

الحل

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-1}{f'(x)} \quad \text{حيث } f'(x) \neq 0$$

$$\therefore 3x^2 = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-1}{3x^2}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx \quad \text{معادلة المنحنى هي :}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{3x^2} dx = \int \frac{-1}{3} x^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^{-1} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{3x} + C$$

$$f(1) = 5$$

$$5 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = 5 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow C = \frac{14}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{14}{3}$$



14

السؤال الثالث :

(a) لتكن الدالة f :

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}$$

(8 درجات)

فأوجد :

(1) الكسور الجزئية

$$\int f(x) dx \quad (2)$$

الحل

$$(1) \quad x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$\frac{2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}$$

$$2 = A(x - 3) + B(x - 1)$$

$$2 = A(1 - 3) + B(1 - 1) \quad : \text{بالتعويض عن } x = 1$$

$$2 = -2A + 0 \Rightarrow A = -1$$

$$2 = A(3 - 3) + B(3 - 1) \quad : \text{بالتعويض عن } x = 3$$

$$2 = 0 + 2B \Rightarrow B = 1$$

$$\frac{2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x - 3}$$

$$(2) \int f(x) dx = \int \left(\frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{x - 3} \right) dx = - \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x - 3} dx$$

$$= - \ln|x - 1| + \ln|x - 3| + C$$



تابع السؤال الثالث :

(b) أوجد :

(6 درجات)

$$\int \frac{1}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right)^5} dx$$

الحل

$$u = \frac{1}{x} + 2, \quad du = -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 2\right)^5} dx = - \int \frac{\left(\frac{1}{x} + 2\right)^{-5}}{-x^2} dx$$

$$= - \int u^{-5} du$$

$$= - \left[\frac{u^{-4}}{-4} + C_1 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{u^4} + C_1 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{x} + 2\right)^4} + C_1 \right]$$

$$= \frac{1}{4 \left(\frac{1}{x} + 2\right)^4} + C \quad : C = \frac{1}{4} C_1$$



السؤال الرابع

14

(a) أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (0, 0) وأحدى بؤرتيه $F(4, 0)$

و يمر بالنقطة $A(6, 0)$ ثم أوجد الاختلاف المركزي له

(7 درجات)

الحل

∴ البؤرة $F(4, 0)$ تقع على محور السينات

فتكون معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + 16$$

∴ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(6, 0)$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$$

$$\therefore a^2 = 36$$

$$\therefore b^2 = 36 - 16 = 20$$



∴ المعادلة هي :

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

تابع السؤال الرابع :

(7 درجات)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases} \quad (b) \text{ لتكن الدالة } f \text{ دالة كثافة احتمال :}$$

1) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

2) أوجد : $P(2 < X \leq 3)$

3) أوجد : التوقع والتباين للدالة f

الحل

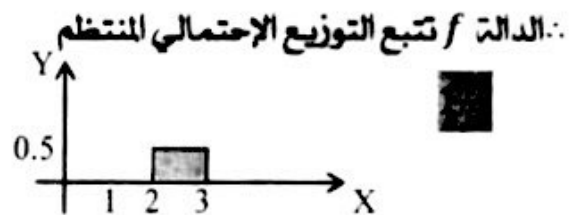
1) الدالة f تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leq x \leq b \\ 0 & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because a = 1, b = 3 \Rightarrow b - a = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$2) P(2 < X \leq 3) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$



$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$$



3) التوقع :

التباين :

القسم الثاني (الأسئلة الموضوعية) :

أولاً : في البنود (1 - 2) ظلل في جدول الإجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) $(F'(x) = \sec^2 x, F(\frac{\pi}{4}) = 1) \Rightarrow F(x) = \tan x + 2$

(2) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}} dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

ثانياً : في البنود (3 - 10) لكل بند أربع اختيارات واحد منها فقط صحيح اختر الإجابة الصحيحة ثم ظلل في جدول الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة :

(3) $\int_0^3 3x|x| dx =$

(a) - 27

(b) - 9

(c) 9

(d) 27



(4) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx =$

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$

(b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

(c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$

(d) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

(5) طول القوس من منحنى الدالة $f : f(x) = x - 3$ في الفترة $[0, 2]$ هو

(a) $\sqrt{2}$ units

(b) $2\sqrt{2}$ units

(c) $3\sqrt{2}$ units

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f : f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي :

(a) 9π units²

(b) 6π units²

(c) $\frac{3}{2}\pi$ units²

(d) $\frac{9}{2}\pi$ units²

(7) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإن :

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2$

(d) $y = x^4 + x^3 + C_1x + C_2$

(8) إذا كان $y^2 = \frac{-1}{6}x$ معادلة قطع مكافئ فإن معادلة الدليل هي :

(a) $y = \frac{-1}{24}$

(b) $y = \frac{1}{24}$

(c) $x = \frac{-1}{24}$

(d) $x = \frac{1}{24}$

(9) معادلتا الخطتين المقاربتين للقطع الزائد :

هما $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$

(a) $y = \pm 2x$

(b) $y = \pm \frac{1}{2}x$

(c) $y = \pm 4x$

(d) $y = \pm \frac{1}{4}x$

(10) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المنقطع X هي :

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي المنقطع X يساوي

(a) 1

(b) $\frac{2}{3}$

(c) $\frac{7}{9}$

(d) 0

إنتهت الأسئلة ...

جدول الإجابة

(1)	(a)	☐	(c)	(d)
(2)	☐	(b)	(c)	(d)

الدرجة : = 1 ×

(3)	(a)	(b)	(c)	☐
(4)	☐	(b)	(c)	(d)
(5)	(a)	☐	(c)	(d)
(6)	(a)	(b)	(c)	☐
(7)	(a)	(b)	☐	(d)
(8)	(a)	(b)	(c)	☐
(9)	☐	(b)	(c)	(d)
(10)	(a)	(b)	☐	(d)



الدرجة :



14