

العام الدراسي : 2016 / 2017 م

وزارة التربية

الزمن : ساعتان ونصف

الإدارة العامة لمنطقة حولي التعليمية

الصف : الثاني عشر علمي

التوجيه الفني للرياضيات

(14 درجة)

السؤال الأول :

(a) أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x > 1 \\ \frac{-1}{x+1} & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{شرط المقام :} \\ &\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} \text{ غير موجوده}$$

تابع/ السؤال الأول :

(b) أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2})}} = \frac{x-2}{|x| \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$\because x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$= \frac{\cancel{x} (1 - \frac{2}{x})}{-\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}} \quad x \neq 0 = \frac{-1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + \frac{2}{x})}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}} = \frac{-1 + 0}{1} = -1$$

شرح الجذر :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2}$$

$$= 1 + 0 - 0 = 1 > 0$$

2/ المقام :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2})}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \neq 0$$

(١٤ درجة)

السؤال الثاني :

(a) ابحث اتصال الدالة $f: f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ عند $x = -2$

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

لكن

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

① $g(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -2$

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^2 - 4(-2) + 3 \\ &= 15 > 0 \end{aligned} \quad \text{②}$$

من ① و ② نستنتج أن f متصلة عند $x = -2$

تابع/ السؤال الثاني :

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq 3 \\ x^2-1, & x > 3 \end{cases}$$

(b) لتكن الدالة f :

أوجد إن أمكن $f'(3)$

$$f(3) = 3 + 5 = 8$$

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad \text{من اليمين} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1 - 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3), \quad \boxed{x \neq 3} \\ &= 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \quad \text{من اليسار} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 5 - 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1, \quad \boxed{x \neq 3} \end{aligned}$$

$$\therefore f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

$$\therefore f'(3) \quad \text{غير موجود}$$

تابع / السؤال الثالث :

(b) بين أن الدالة $f: x \mapsto x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية . فسر إجابتك

f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على $[0, 4]$ وتابعة للاستقامة على $(0, 4)$ فهي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $(0, 4)$

∴ يوجد على الأقل $c \in (0, 4)$ بحيث :

$$\bar{f}(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$3c^2 - 3 = \frac{54 - 2}{4}$$

$$3c^2 - 3 = 13$$

$$3c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = \frac{16}{3}$$

$$c = -\frac{4}{\sqrt{3}} \notin (0, 4) \text{ or } c = \frac{4}{\sqrt{3}} \in (0, 4)$$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 3$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 3$$

$$f(4) = 54$$

$$f(0) = 2$$

التقدير : يوجد سطح مماس للدالة عند $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ يوازي المماس

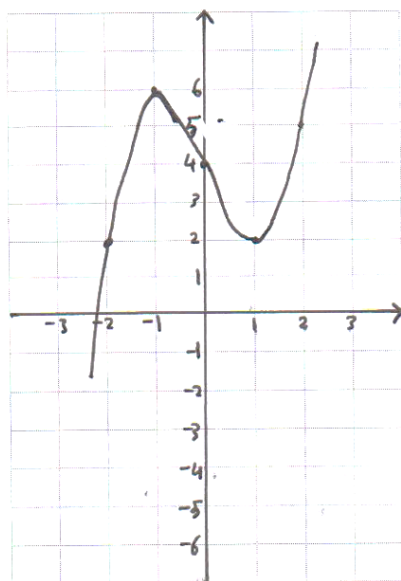
المار من النقطتين $(0, 2)$ و $(4, 54)$

(١٤ درجة)

$f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

السؤال الرابع :

(a) ادرس تغير الدالة



f دالة كئيبة المحدود مجالها R

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

توجد النقاط المبرجة :

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -1, x = 1$$

$$f(-1) = 6, f(1) = 2$$

$$(-1, 6), (1, 2)$$

نقطتان حرجيتان .

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, f(0) = 4$$

الفترة	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	—	+
الشكل	∩	∪

صفحة الدالة مقع لا سفد في $(-\infty, 0)$
لأنه في $(0, \infty)$

$$(-2, f(-2)) = (-2, 2)$$

$$(2, f(2)) = (2, 5)$$

الفترة	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	+	—	+
سلوك f	↗	↘	↗
	متزايدة	متناقصة	متزايدة

الدالة متزايدة في $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$

الدالة متناقصة في $(-1, 1)$

تابع / السؤال الرابع :

(b) عينة عشوائية حجمها $n = 20$ أعطت $\bar{x} = 30$ ، $\sigma = 4.5$ أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95 % لمعلمة المجتمع μ المجهولة علماً بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً

∴ مستوى الثقة 95%

∴ القيمة الحرجة : $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∴ المعطيات

∴ هامش الخطأ : $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$E = 1.96 \times \frac{4.5}{\sqrt{20}} \approx 1.9722$$

∴ فترة الثقة :

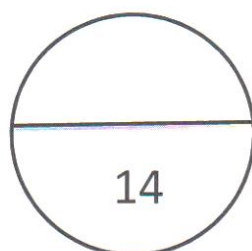
$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

$$= (30 - 1.9722, 30 + 1.9722)$$

$$= (28.0278, 31.9722)$$

اجابة البنود الموضوعية

1		b		
2	a			
3		b	c	d
4		b	c	d
5	a		c	d
6	a	b	c	
7		b	c	d
8	a	b		d
9		b	c	d
10	a	b	c	



المصحح :

المراجع :