الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

تعريف: العدد المركب — Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z=a+bi$

الصورة $a+bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى a **الجزء الحقيقي Real Part**

ويسمى b **الجزء التخيلي Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

في التمارين (1–4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$

(2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (5–8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$

(6) $\sqrt{-1}+2$

(7) $\dfrac{-\sqrt{-50}-2}{6}$

(8) $\dfrac{\sqrt{-8}+8}{2}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \; , \; b_1 = b_2$$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

c $3i = 2x - 5yi$

b $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

a $x + 5i = 7 - 3yi$

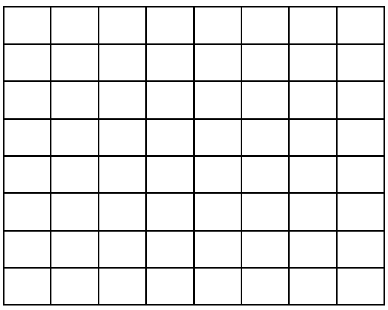
$z = a + bi \longleftrightarrow M(a , b)$

الصورة الجبرية — الصورة الديكارتية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عددًا مركبًا، وكل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي.
في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي **المستوى المركب (مستوى أرجاند)**، ويسمى محور السينات **بالمحور الحقيقي**، ويسمى محور الصادات **بالمحور التخيلي**.

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1 = -2 + 3i$ (b) $z_2 = -4$ (c) $z_3 = -i$ (d) $z_4 = 2(2 + i)$



(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4 , 5)$ **(b)** $M(-4, -2)$ **(c)** $N(-2 , 6)$ **(d)** $P(0, -3)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

c $z_3 - z_2 - z_1$

b $z_2 - z_1$

a $z_1 + z_2$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

  مثلًا، إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

  أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -z_2$
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

إذا كان $z_1 \ , \ z_2 \in \mathbb{C} \ , \ c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1. $c z_1 = c a_1 + c b_1 i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

إذا كان p عدد كلي فإن:

$i^{4p} = 1 \ , \ i^{4p+1} = i \ , \ i^{4p+2} = -1 \ , \ i^{4p+3} = -i$

في التمارين (14–23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(15) $6 - (8 + 3i)$

(17) $(8 - \sqrt{-1}) - (-3 + \sqrt{-16})$

(19) $(4i)(-9i)^2$

(21) $(-6 - 5i)(1 + 3i)$

(23) $i(-6i)^3$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

ملاحظة: لإيجاد المرافق $(\overline{z})$ يجب أن يكون z على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

(25) إذا كان $z_1 = 2 + i \quad , \quad z_2 = -3 + 4i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3} z_2$ **(b)** $z_1 . z_2$ **(c)** z_1^3 **(d)** $\overline{\overline{z}_1 . z_2}$

(e) $\overline{z}_1 - \overline{z}_2$ **(f)** $z_1 . \overline{z}_2$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ **(b)** $5i$ **(c)** $3i-4$

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر بضرب كلّ من البسط والمقام في مرافق المقام.

(28) إذا كان $z_1 = \sqrt{3} + i \ , \ z_2 = -\sqrt{3} + 2i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \ , \ \frac{z_1}{z_2} \ , \ \frac{\overline{z_1}}{z_2}$

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

مثال 1 :

أوجد:

$|2i|$ $\qquad$ $|2-2i|$ $\qquad$ $|5+12i|$

مثال 2 حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $(2, 270^\circ)$ $\qquad$ $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right|$$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : \ x > 0 , y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0 , y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0 , y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

مثال 1 :

أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

$(3\sqrt{3}, -3)$ | $(0, 4)$ | $(-2, 5)$

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \ , \ \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

$2 + 2i$

$3i$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$-2 + 2i\sqrt{3}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$

مثال 1 :

اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$8(\cos 30^\circ - i\sin(-150^\circ))$$

$$5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$5\left(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ)\right)$$

$$-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 : ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right)$$

مثال 3 : ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

c $z_3 = \frac{-3}{4}$

b $z_2 = 5$

a $z_1 = 2i$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 : أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

$$z + 2\overline{z} = 4 + i$$

$$3z - 1 + i = 5 - 2i$$

$$z + i = 2\overline{z} + 1$$

$$2z + i = 3 + 2i$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 : أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

$$x^2 + 6x + 25 = 0$$

$$16x^2 + 64 = 0$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$x^2 - 5x + 7 = 0$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

، لتكن المعادلة $z^2+z+2=0$ ، بدون حل المعادلة، أثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

معلومة:
إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن:
$z_1 + z_2 = 0$

مثال 1 :

أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

مثال 2 :

أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 : أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثال 1 : أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

$$y = \frac{1}{2}\cos(-x)$$

$$y = -2\cos 5x$$

$$y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$$

$$y = 3\sin\frac{x}{3}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b) الدورة هي π ، $a = 0.25$

مثال 3 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

(b) الدورة π , $a = \frac{1}{3}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$y=\sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x)=-\sin x\,,\ \forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

مثال 1 : مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

$$y=-3\sin x$$

$$y=2\sin x$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x) = \cos x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

مثال 1 :

مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

$y = -\cos 3x$

$y = 3\cos 5x$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: $\cos x \neq 0$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات
   رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \ , \ \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.
   وبصفة عامة: الدالة $y = a\tan bx$،
   دورتها: $\dfrac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\dfrac{-\pi}{2b} \ , \ \dfrac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty \ , \ \infty)$	$(-\infty \ , \ \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x, x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1 \ , \ 1]$	$[-1 \ , \ 1]$	$(-\infty \ , \ \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 :

مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

$y = -3\tan x$

$y = \tan 5x$

مثال 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$

(b) الدورة $\frac{2\pi}{3}$

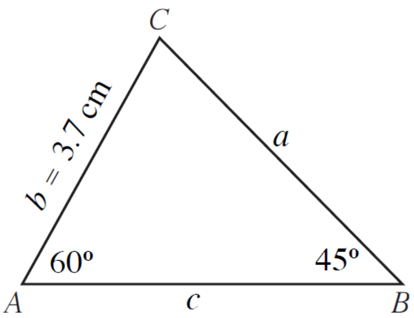
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

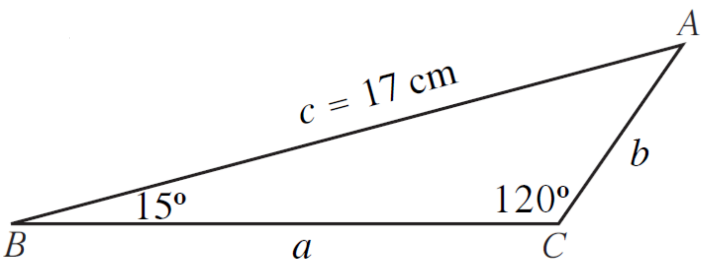
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

مثال 1 : حل ΔABC حيث:



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

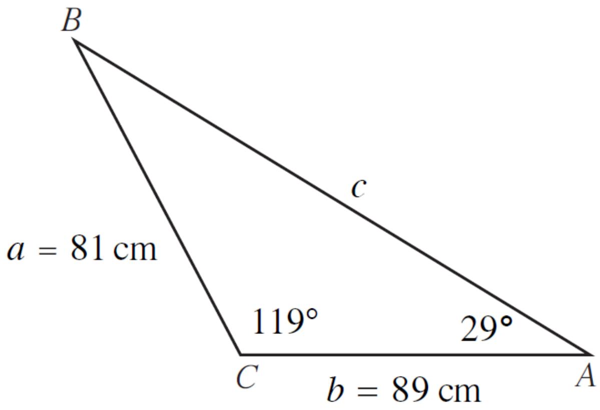
مثال 2 :   حل ΔABC حيث:



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 :

حل ΔABC حيث:



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 : حل ΔABC حيث:

$$m(\widehat{A}) = 43^{\circ}\,,\, a = 32\,\text{cm}\,,\, b = 28\,\text{cm}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 : حل ΔABC حيث:

$$m(\widehat{A}) = 32^{o} , a = 17 \text{ cm} , b = 11 \text{ cm}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 :

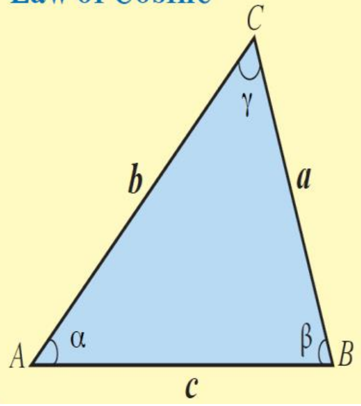
حل ΔABC حيث:

$$m(\widehat{C}) = 68^{\circ}, a = 19 \text{ cm}, c = 18 \text{ cm}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قانون جيب التمام

Law of Cosine



في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

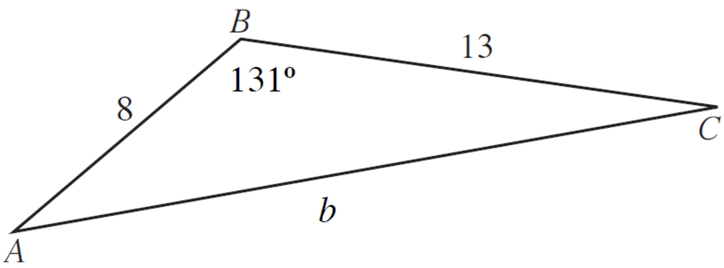
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1 :

حل ΔABC حيث:



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 : **حل ΔABC حيث:**

$$a = 12 , b = 21 , m(\widehat{C}) = 95^{o}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 :

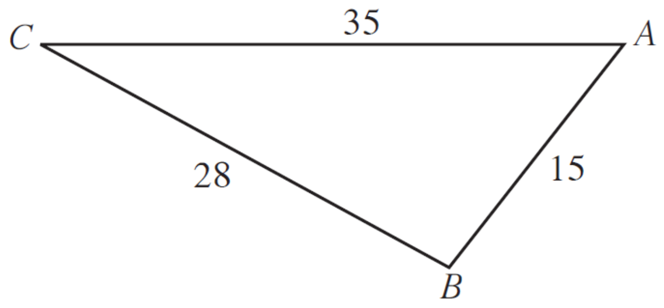
حل ΔABC حيث:

$$b = 22\,, c = 31\,, m(\widehat{A}) = 82^{\circ}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 :

حل ΔABC حيث:



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

حل ΔABC حيث:

$$a = 2 , b = 5 , c = 4$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 :

حل ΔABC حيث:

$$a = 3.2 , b = 7.6 , c = 6.4$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 : أوجد مساحة المثلث ABC

$$m(\hat{A}) = 47^\circ \;,\; b = 32\,\text{cm} \;,\; c = 19\,\text{cm}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 : أوجد مساحة المثلث ABC

$a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ c = 8\,\text{cm}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = $ **semiperimeter (نصف محيط المثلث)**

مثال 1 : أوجد مساحة المثلث ABC

$a = 5 \ , \ b = 9 \ , \ c = 7$

مثال 2 : أوجد مساحة المثلث ABC

$a = 23 \ , \ b = 19 \ , \ c = 12$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 : أوجد مساحة المثلث ABC

$$a = 19.3 \ , \ b = 22.5 \ , \ c = 31$$

مثال 4 : في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب $7.5\ \text{m}^2$.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: $3\ \text{m} \ , \ 5\ \text{m} \ , \ 6\ \text{m}$

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 :

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$

مثال 2 :

اثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}-\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\cdot\sec x$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 : أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

مثال 4 : أثبت صحة المتطابقة:

$$(\cos x)(\tan x+\sin x\cot x)=\sin x+\cos^2 x$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 :

أثبت أن: $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

أثبت صحة المتطابقة:

$$(1-\tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$$

مثال 2 :

أثبت صحة المتطابقة:

$$\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 :

حل المعادلة:

$$\sin x = \frac{-1}{2}$$

مثال 2 :

حل المعادلة:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 :

حل المعادلة:

$$\sqrt{3}\tan a = 1$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 : حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 :

حل المعادلة:

$$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 : حل المعادلة:

$4\cos 2x = 2$ حيث $0° \le x < 360°$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 : أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0\,,2\pi)$

$$\sin 2x = 1$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 : أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

$$\tan 2x = 1$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

مثال 1 : أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

مثال 2 : أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 3 : **اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.**

$$\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos x+\sin\frac{\pi}{7}\sin x$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

مثال 1 :

، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(3) $\cos 75°$

(2) $\tan 135°$

(1) $\sin 15°$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

إذا كان $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ، $\sin\gamma = \frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ، $\cos\beta = \frac{-8}{17}$

(a) أوجد: $\sin(\beta+\gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta-\gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma+\beta)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

مثال 1 :

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

مثال 2 :

إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال 3 :

إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال 4 :

إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 1 :

اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال 2 :

أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

مثال 3 :

أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

مثال 1 :

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

$\sin 15^\circ$

$\tan 195^\circ$

$\cos 75^\circ$

مثال 2 :

إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

$\cos\frac{\theta}{2}$, $\tan\frac{\theta}{2}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مسلمات (موضوعات) الفضاء

أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

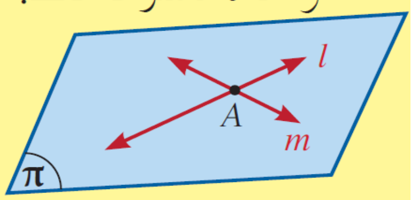
حالات تعيين المستوي في الفضاء

- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

أوضاع المستقيمات في الفضاء

a متقاطعان

إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط.

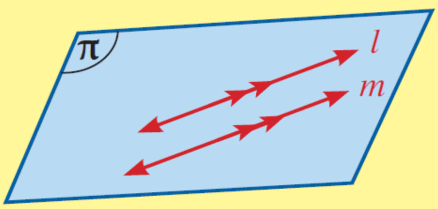


$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$

مستقيمان متقاطعان

b متوازيان

إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.



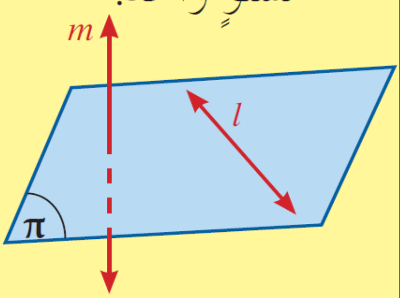
$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$,

$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

مستقيمان متوازيان

c متخالفان

إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.



$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $m \not\subset \pi$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

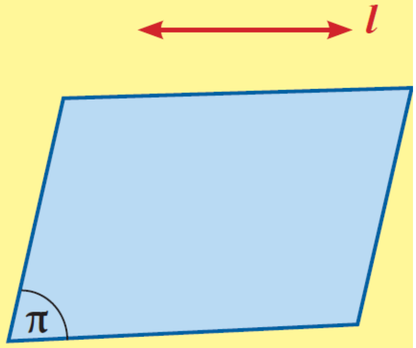
مستقيمان متخالفان

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء

a صفر نقطة مشتركة:

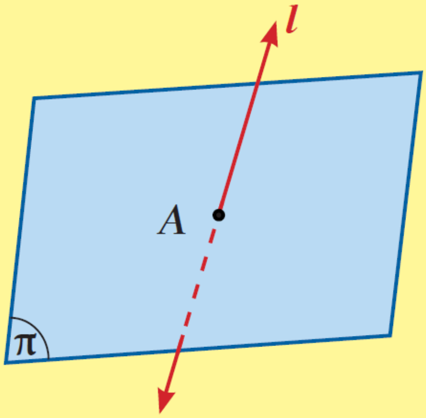
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت).



$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \,/\!/\, \pi$

b نقطة مشتركة واحدة:

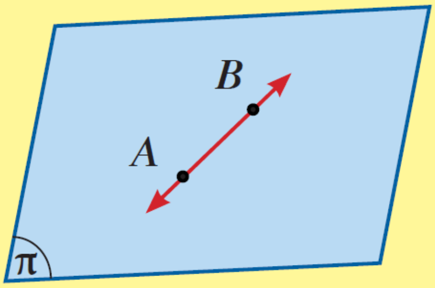
المستقيم يقطع المستوي.



$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$

c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل

المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي).



$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \pi$

أوضاع مستويين في الفضاء

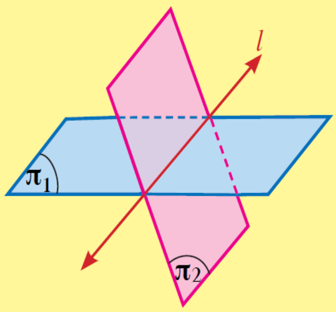
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

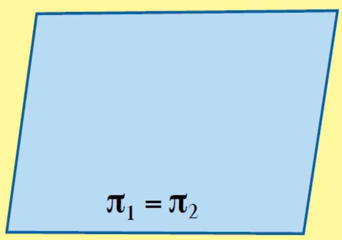
يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

a المستويان متقاطعان في مستقيم.



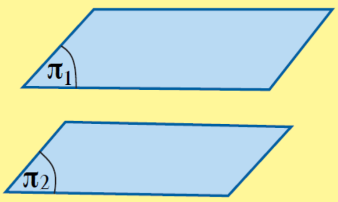
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

b المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط).



$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

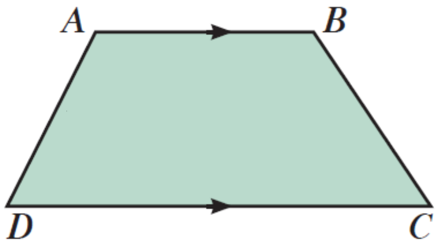
c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما).



$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (1)



أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

الحل:

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

البرهان:

$\because \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

$\because$ النقطتين A , D تنتميان إلى المستوي π

$\therefore \overline{AD} \subset \pi$

$\because$ النقطتين B , C تنتميان إلى المستوي π

$\therefore \overline{BC} \subset \pi$

$\therefore$ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع في مستوٍ واحد.

مثال 2 :

$\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

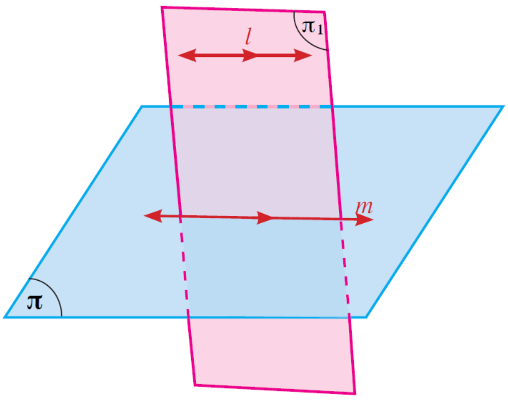
المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية (1)

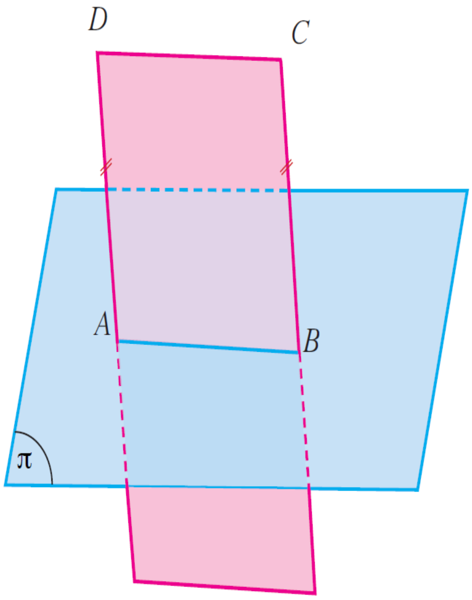
إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوى.



مثال (1)

في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$



الحل:

المعطيات: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

المطلوب: إثبات أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن $(ABCD)$ فيه

$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $AD = BC$

$\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع

ومنه $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (نظرية)

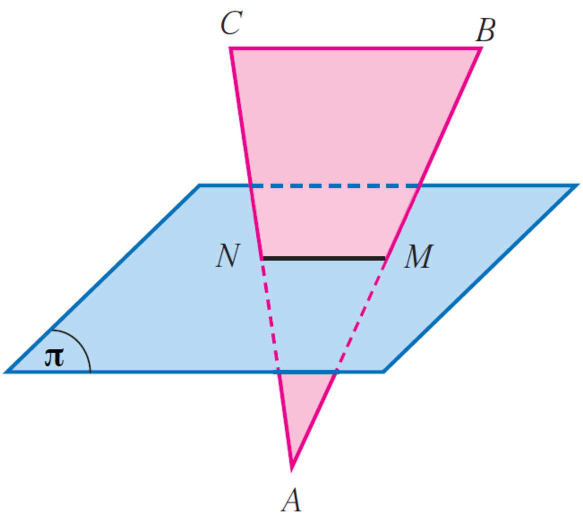
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

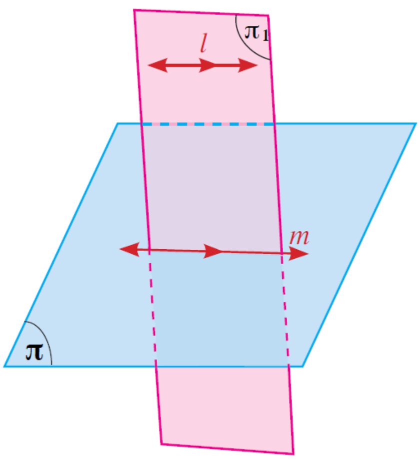
M، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\pi \parallel \overleftrightarrow{BC}$.



نظرية (2)

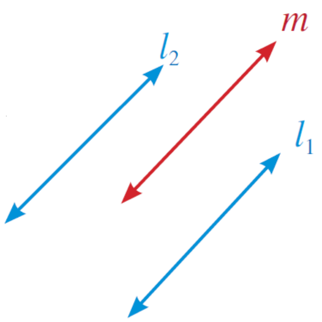
إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



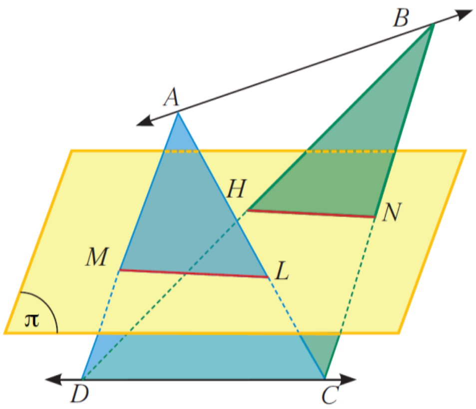
مثال (2)

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$



الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$

$\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

المطلوب: إثبات $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (ADC)

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\} \ , \ \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$ (معطى)

$\therefore (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$ (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (2) (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (ACD)$ (3)

من (1), (2), (3) نجد أن:

$\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (4) نظرية

$\because \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (BCD)

$\because \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\} \ , \ \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$ (معطى)

$\because (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$ (5)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (6)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$ (7)

من (5), (6), (7) نجد أن:

$\overleftrightarrow{HN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (8) نظرية

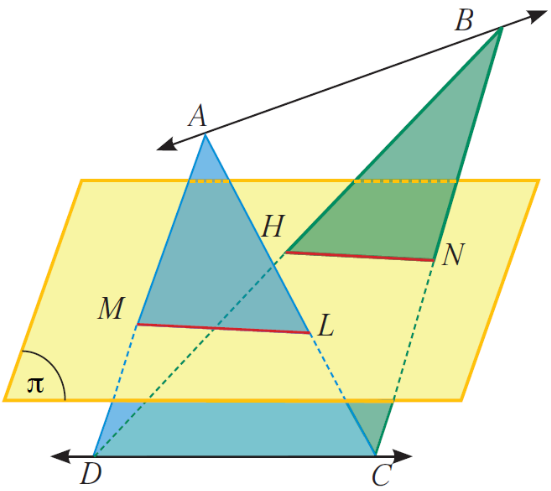
من (4), (8) نستنتج أن:

$\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ نظرية

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.



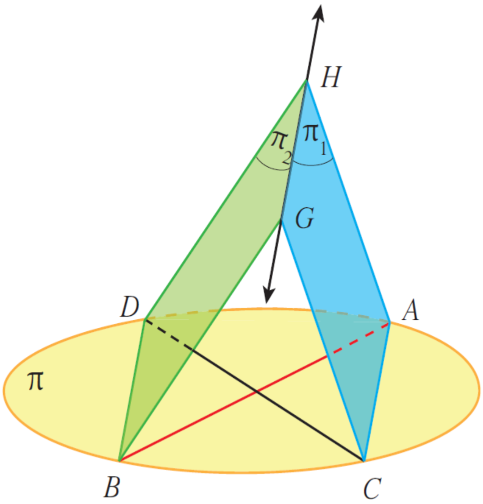
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

مثال (3)



في الشكل المقابل: $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

الحل:

المعطيات: $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في الدائرة

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

المطلوب: إثبات أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان:

$\because$ $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\therefore \ \overline{AC} \parallel \overline{DB} \qquad (1)$

$\because \ \overline{AC} \subset \pi_1 \ , \ \overline{DB} \subset \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH} \qquad (2)$

من $(1), (2)$

$\therefore \ \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\because \ \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \ , \overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore \ \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

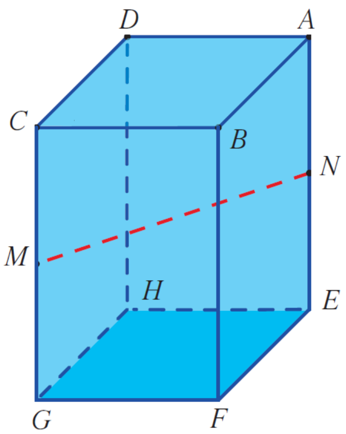
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

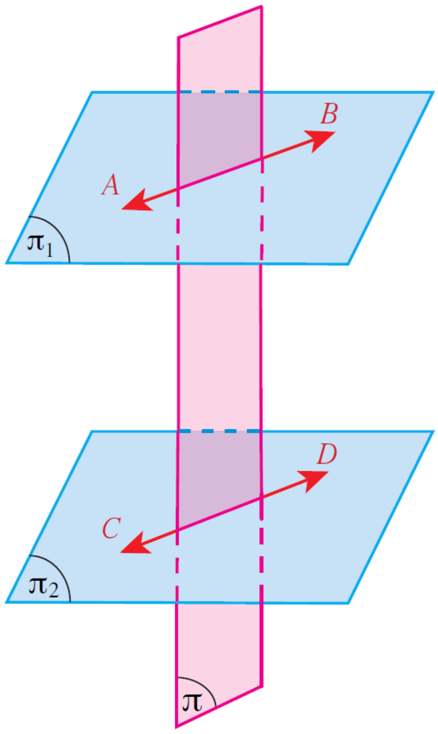
أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



مثال (4)

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في F ويقطعان π_1 في A, B، π_2 في C, D

$BD = 4\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$, $FB = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد محيط المثلث FAB.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

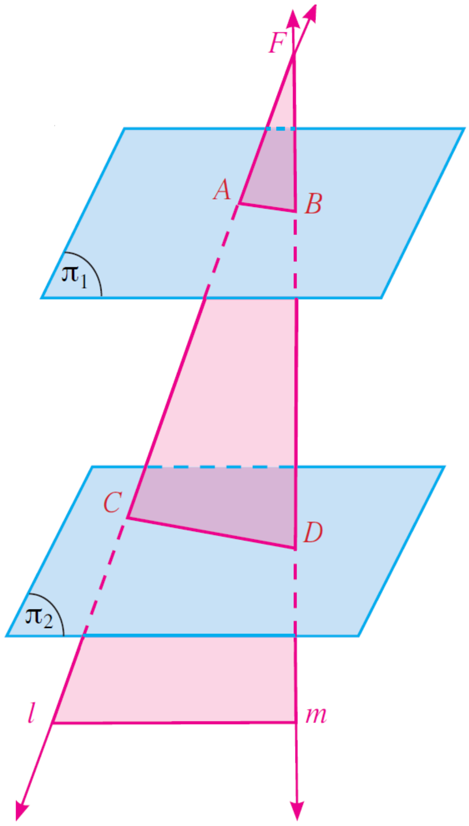
البرهان:

$\because$ $\overleftrightarrow{l}\,,\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}\,,\overleftrightarrow{m}$ يعينان مستوٍ واحد π

$\because$ $\pi_2\;,\;\pi_1$ متوازيان.

$\pi\cap\pi_1=\overleftrightarrow{AB}\;,\;\pi\cap\pi_2=\overleftrightarrow{CD}$



(نظرية 4) $\therefore\;\overleftrightarrow{AB}\parallel\overleftrightarrow{CD}$

في المستوي π ، $\overleftrightarrow{AB}\parallel\overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ المثلثان FAB, FCD متشابهان

نكتب التناسب: $\dfrac{FB}{FD}=\dfrac{FA}{FC}=\dfrac{AB}{CD}$

بالتعويض: $\dfrac{5}{5+4}=\dfrac{FA}{FA+6}=\dfrac{AB}{9}$

$$\frac{5}{5+4}=\frac{FA}{FA+6}$$

تعطي: $9FA=5(FA+6)$

$$4FA=30\implies FA=7.5\text{ cm}$$

كذلك $\dfrac{5}{5+4}=\dfrac{AB}{9}$

تعطي: $9AB=45\implies AB=5\text{ cm}$

محيط المثلث FAB يساوي:

$$FA+FB+AB=7.5\text{ cm}+5\text{ cm}+5\text{ cm}$$

$$=17.5\text{ cm}$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

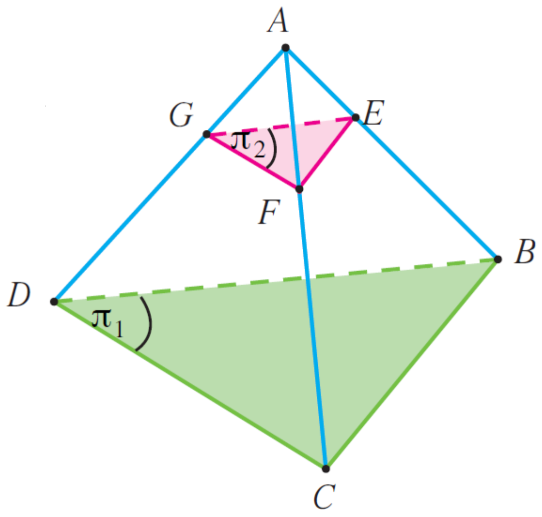
حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\ \text{cm}$

فأوجد DC

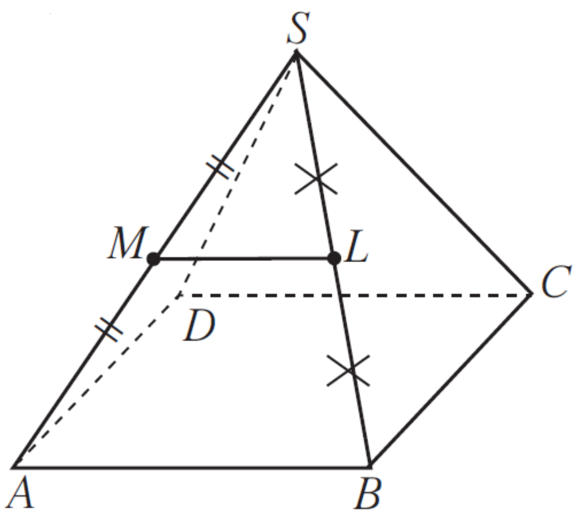


* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

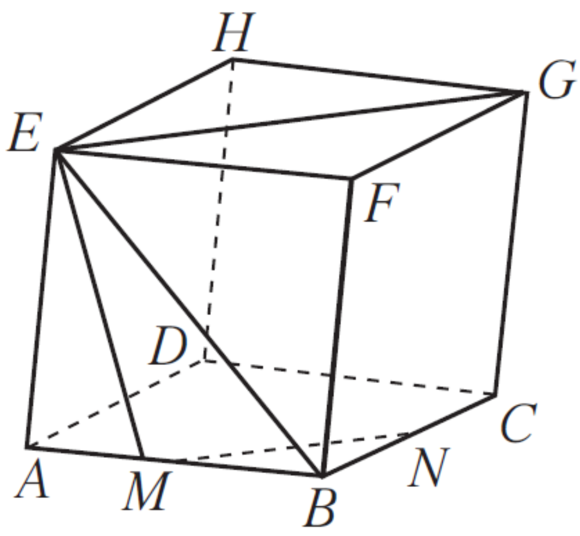


* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(4) $ABCDEFGH$ مكعب.

$M \in \overline{AB}$، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

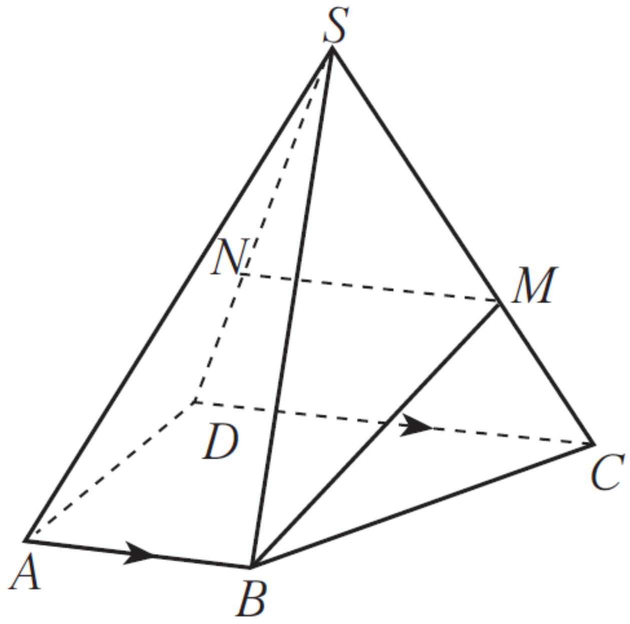


(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$M \in \overline{SC}$، المستوي ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



(7) ليكن π_2 , π_1 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(8) $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

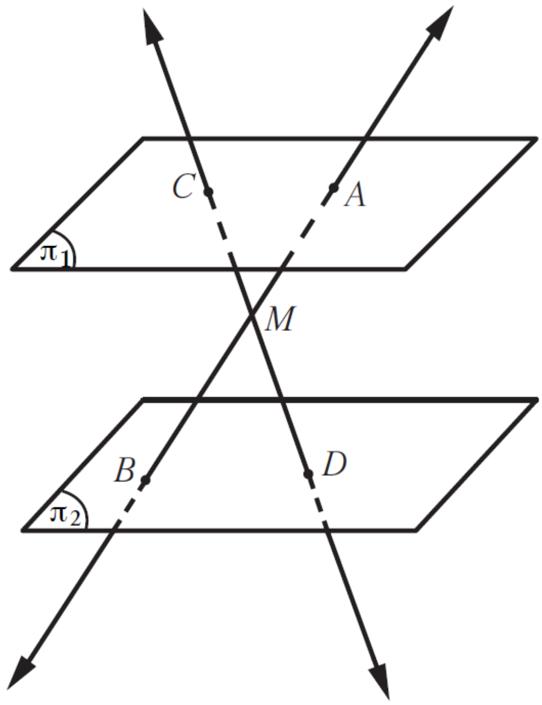
أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(9) في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

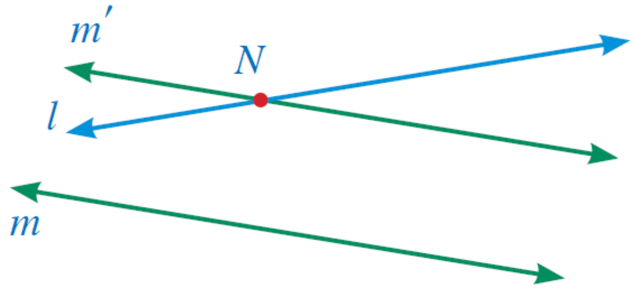
أثبت أن: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$



الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.

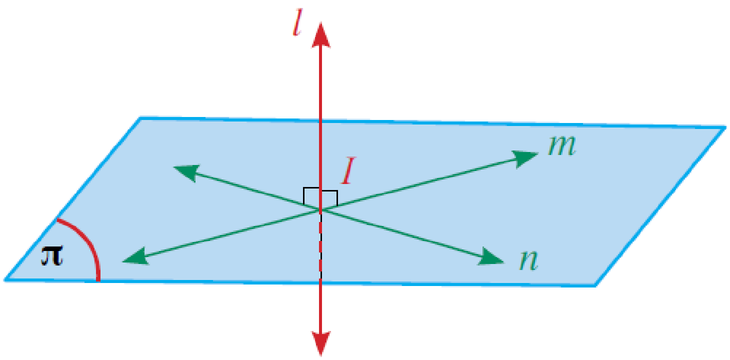
$\hat{N}$ = **الزاوية الحادة** بين المستقيمين $l\,,m$

ملاحظة: لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N



تعريف

يكون المستقيم l عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

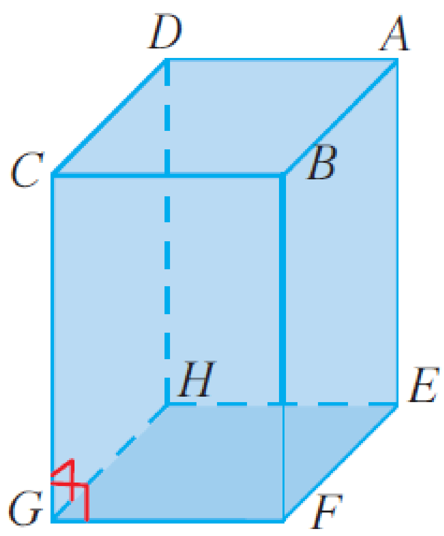


والعكس صحيح ،

فإذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوي π

نظرية (5)

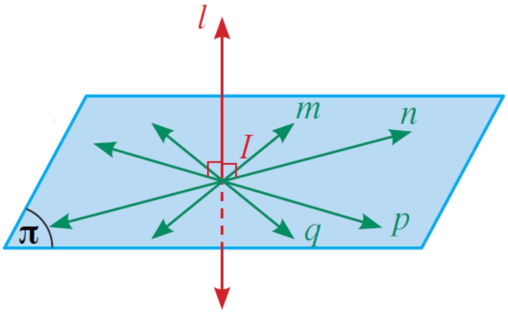
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما



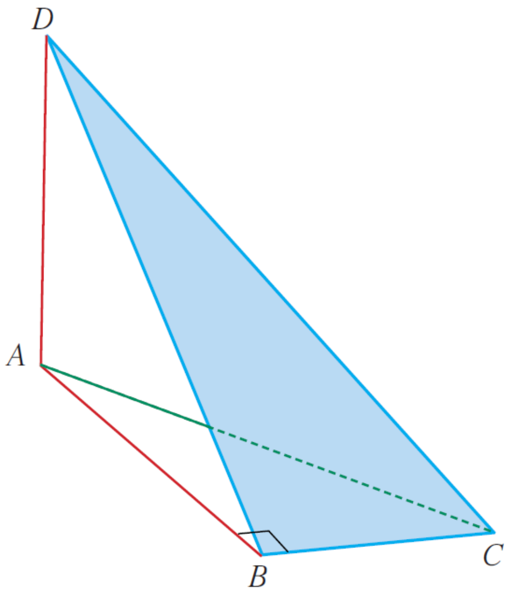
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًا على المستقيم المعلوم.



مثال (1)



في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

الحل:

المعطيات:

المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

المطلوب:

إثبات أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (1) (تعريف)

$\because$ المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (2)

$\because$ المستقيمان $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يعينان المستوى (ABD) (3)

من $(3), (2), (1)$ $\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

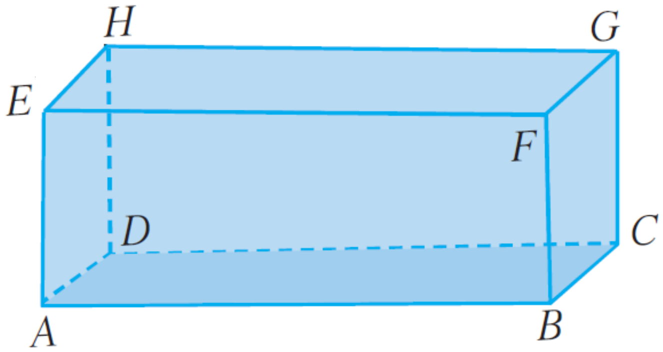
$\because$ $\overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (تعريف)

$\therefore$ المثلث BCD قائم في B.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل



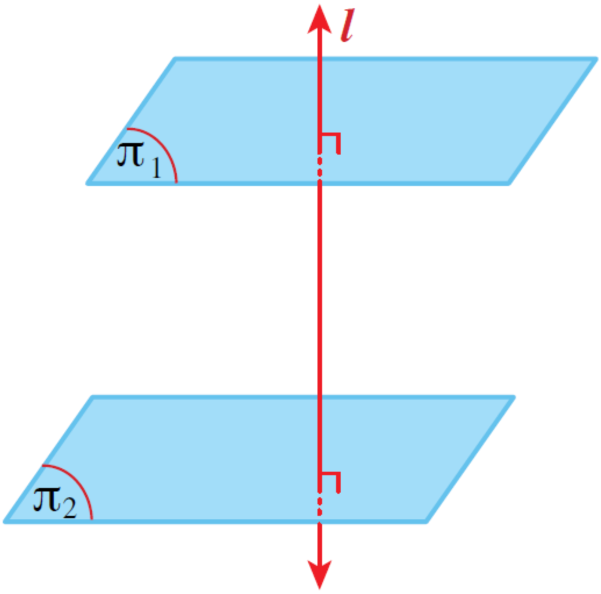
1 في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية (6)

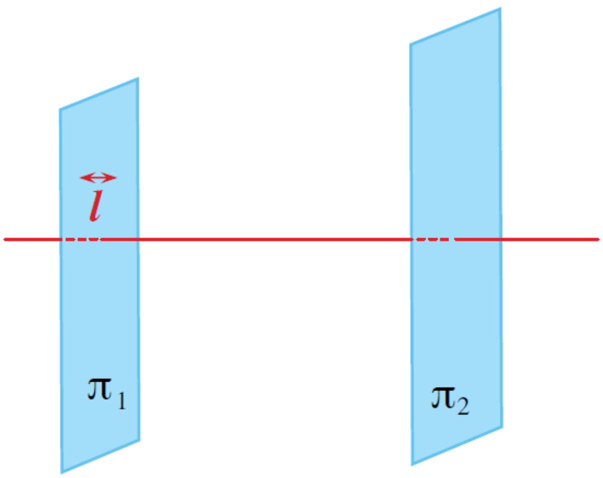
إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$$

نظرية (7)

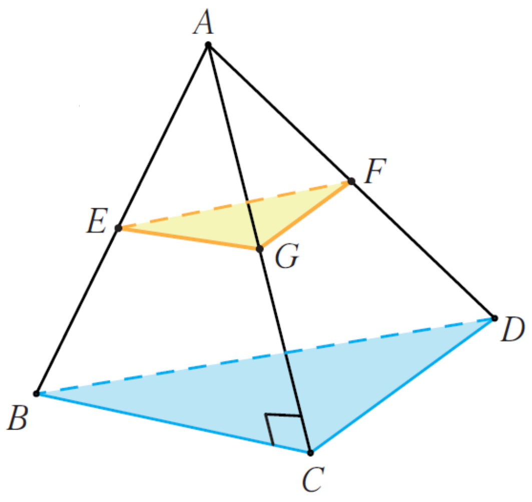
إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \,/\!/\, \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (2)



في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$.

الحل:

المعطيات:

E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$ ، F منتصف $\overline{AD}$

$AD = 13\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$, $CD = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن: $(EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$

البرهان:

في $\triangle ACD$:

$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169 \quad (1)$

$(AD)^2 = (13)^2 = 169 \quad (2)$

من $(1), (2)$ نجد أن $\triangle ACD$ قائم الزاوية في C.

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$

ولكن $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ (معطى)

وحيث إن $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ (نظرية 5)

في $\triangle ABC$

$\because$ E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{EG} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CB}$

ولكن $m(B\widehat{C}A) = 90^\circ$

$\therefore m(A\widehat{G}E) = 90^\circ \Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

وبالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن: $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \quad (4)$

من $(3), (4)$ ينتج أن: نظرية (6) $\therefore (EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$

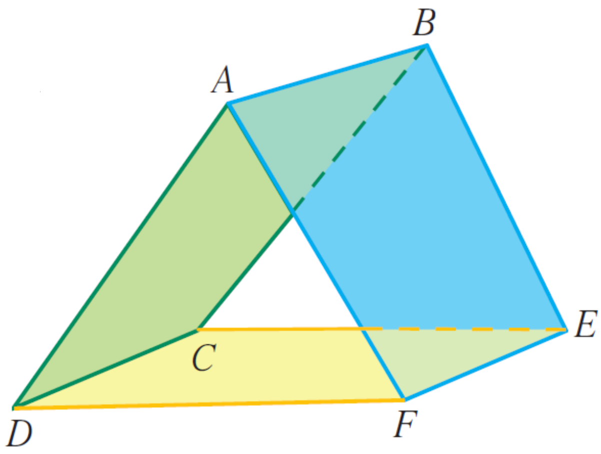
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

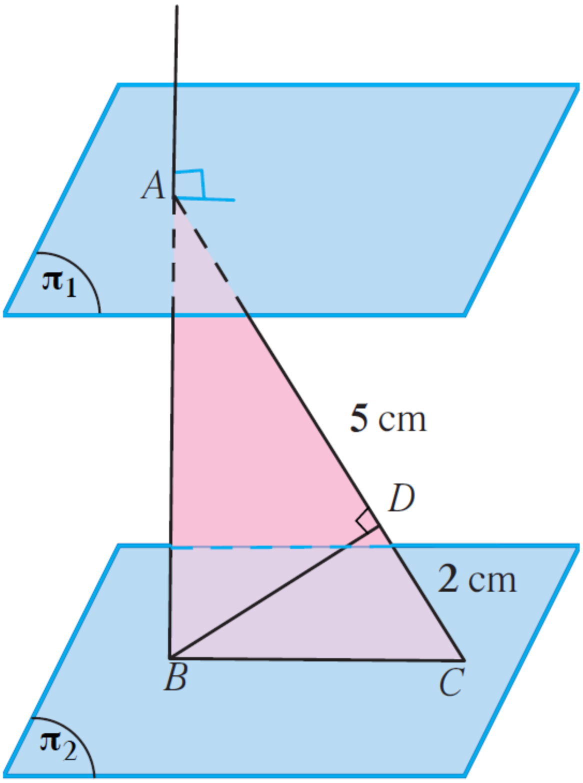
مثال (3)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD



الحل:

المعطيات:

$\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \parallel \pi_2$

$DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$\because \pi_1 \parallel \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ (نظرية 7)

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because \overline{BC} \subset \pi_2$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

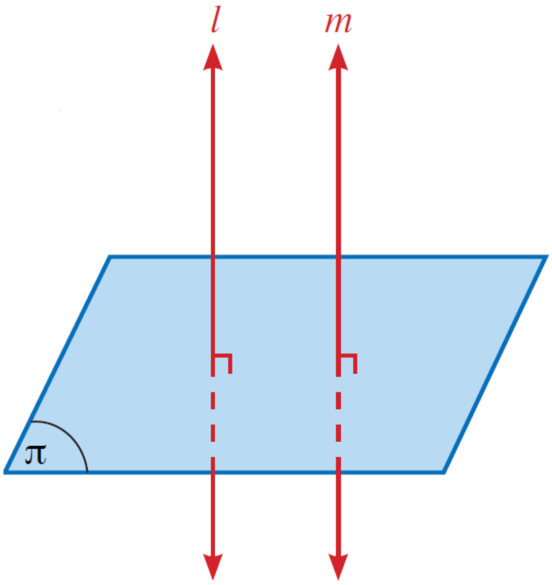
$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore (BD)^2 = AD \times DC$

$= 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\text{ cm}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .



نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \ \Longrightarrow \ \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \ \Longrightarrow \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

مثال (4)

في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $FB = 4\ \text{cm} \ , \ CF = 2\ \text{cm} \ , \ EA = 6\ \text{cm} \ , \ CE = 3\ \text{cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

الحل:

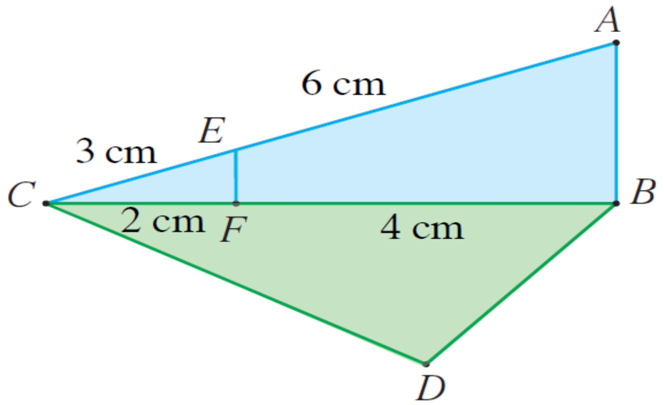
المعطيات: $\overline{AB} \perp (BCD)$

$FB = 4\ \text{cm} \ , \ CF = 2\ \text{cm} \ , \ EA = 6\ \text{cm} \ , \ CE = 3\ \text{cm}$

المطلوب:

إثبات أن $\overline{EF} \perp \overline{BD}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .



البرهان: $\because$ $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ متقاطعان $\therefore$ يعينان مستوٍ وحيد (ABC)

في المثلث CAB:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore \overline{EF} \perp (CBD)$ (1) نظرية

$\overline{DB} \subset (CBD)$ (2)

من (2) ,(1) نستنتج أن:

$\overline{EF} \perp \overline{DB}$ تعريف

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

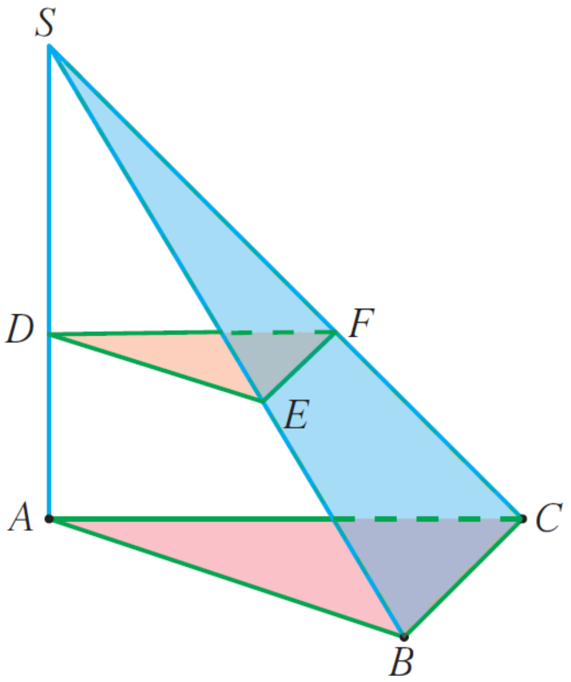
4 في الشكل المقابل:

المستويان (DEF) , (ABC) متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $AC = 6\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $SE = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF

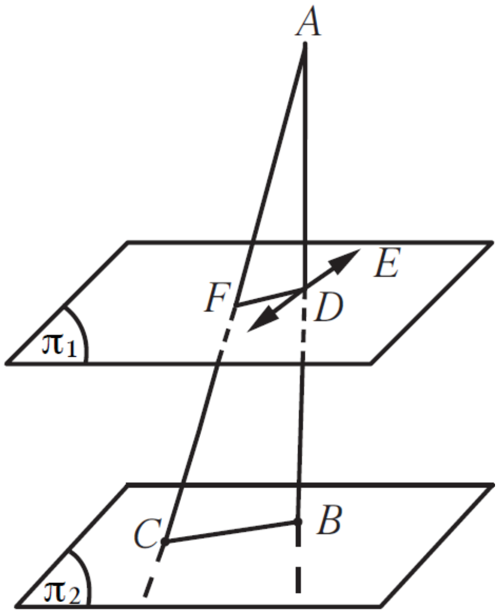


* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

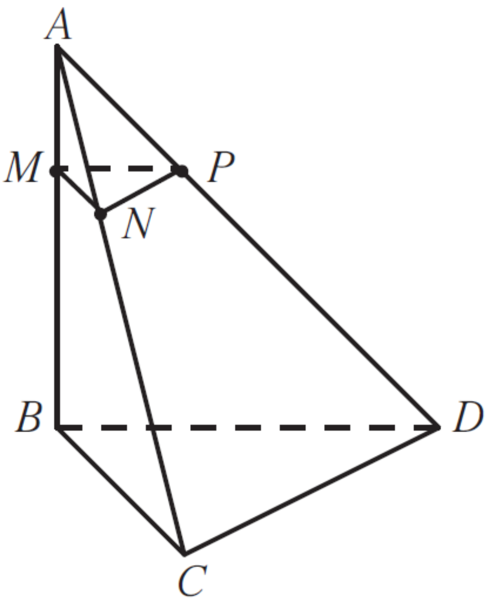


* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(6) في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:

$AB = 3\,AM$ ، $AC = 3\,AN$ ، $AD = 3\,AP$ ،

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

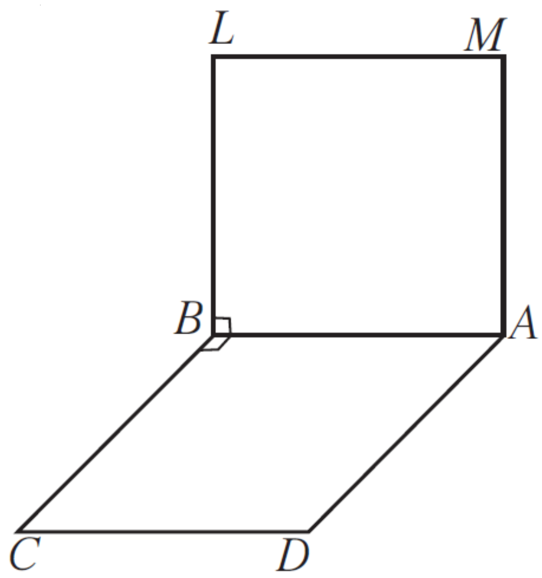
(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًّا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$

فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(11) $ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

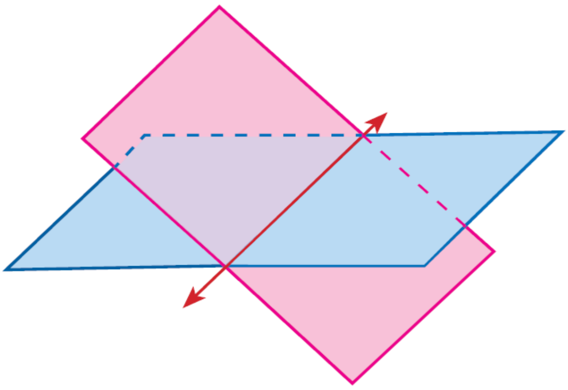
أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية) The Dihedral Angle

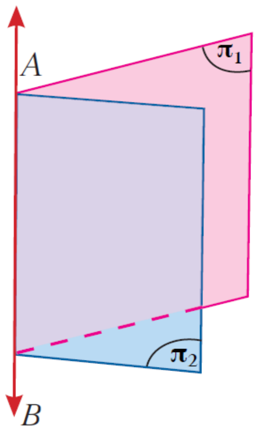
تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.

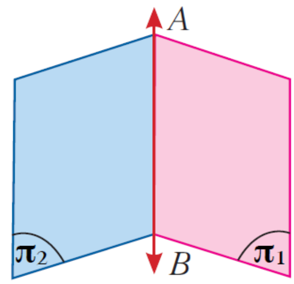


يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$



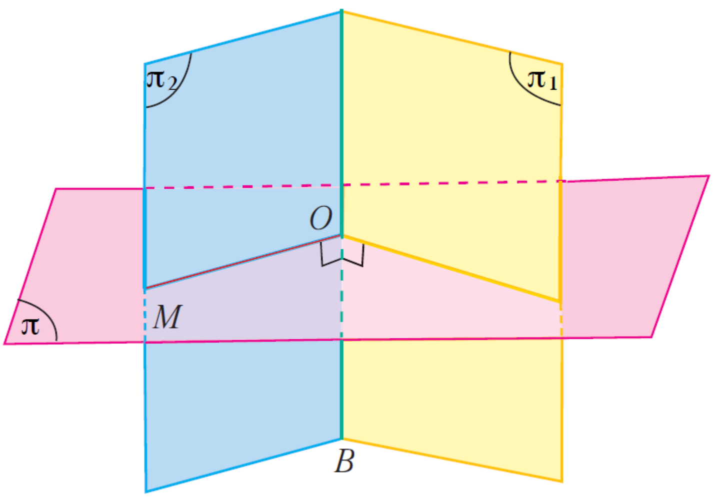


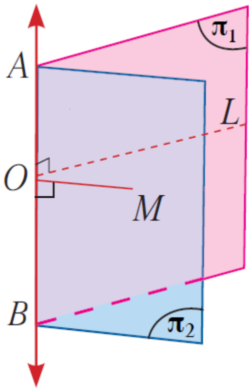
نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 \, , \overleftrightarrow{AB} \, , \pi_2)$

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

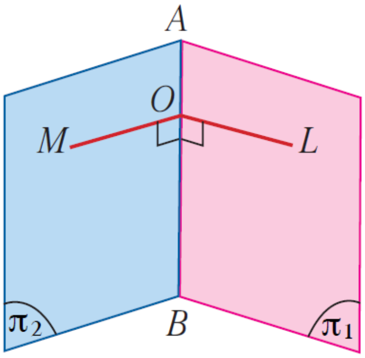
ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**.





لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:

- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_2



فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

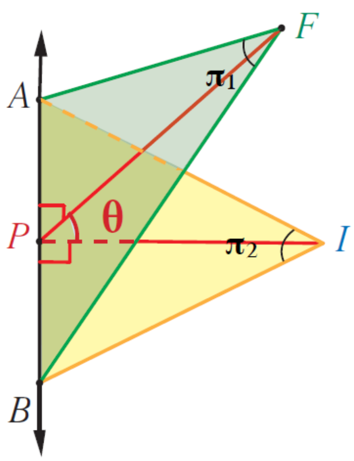
قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(L\widehat{O}M)$

ونحصل على الزاوية المستوية بقطع الزاوية الزوجية بمستوٍ عمودي على حافتها.

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1 , π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

حافة الزاوية الزوجية ....

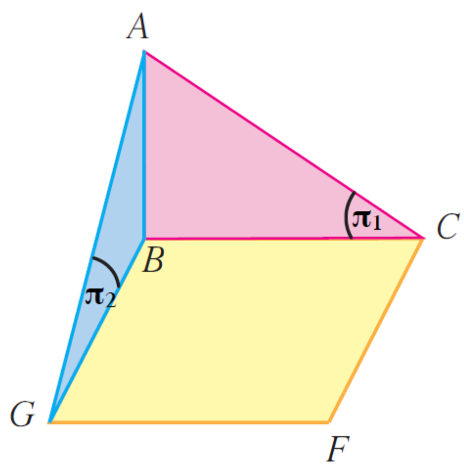
$...... \subset \pi_1$, $..... \perp \overline{AB}$

وكذلك $....... \subset \pi_2$, $...... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

$\overline{BC} \subset \pi_1$, $...... \perp \overline{AB}$

وكذلك $......... \subset \pi_2$, $......... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (1)

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm
M منتصف $\overline{DC}$

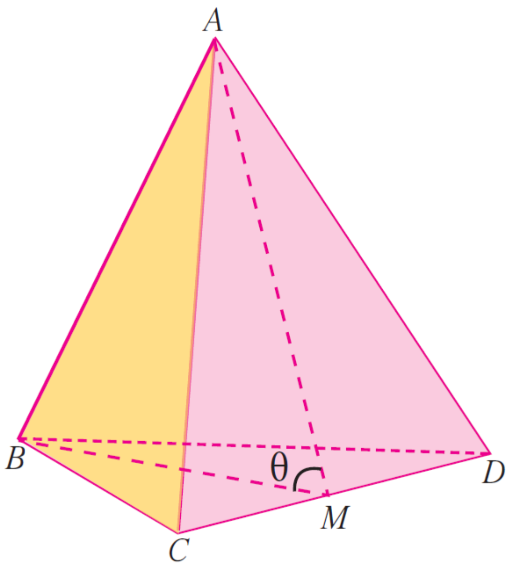
a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف = 8 cm، M منتصف $\overline{DC}$.

a **المطلوب:** تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC



البرهان:

نحدّد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

$\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع.

$\because$ M منتصف $\overline{CD}$ — من خواص Δ متطابق الأضلاع

$\therefore$ $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{AM} \subset (ADC)$ (2)

$\therefore$ $\overline{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{BM} \subset (BDC)$ (3)

وبالمثل نجد أن: $A\widehat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان:

$\because$ المثلث AMD قائم الزاوية في M.

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2 = (AD)^2 - (DM)^2$$
$$(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$(AM)^2 = 64 - 16 = 48$$
$$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

في المستوي AMB:

$$BM = AM = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM.

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (MB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2AM \cdot MB}$$
$$\cos\theta = \frac{48 + 48 - 64}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}} = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

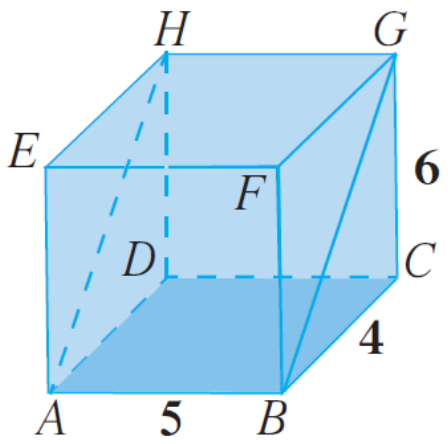
أي $70^\circ 31' 43.61''$

$\therefore$ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالي $70^\circ 31' 44''$

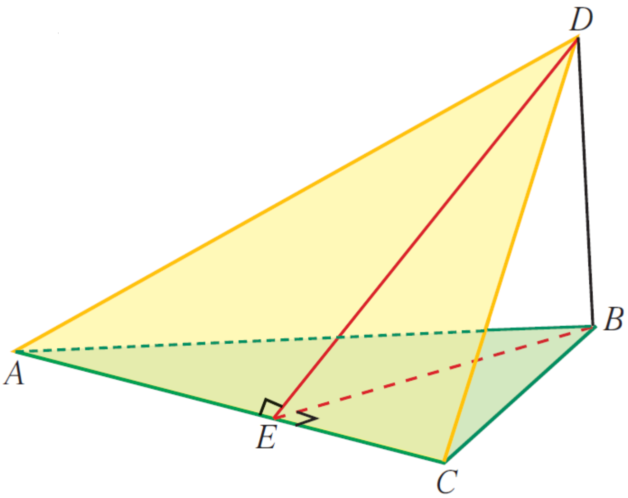
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.



مثال (2)



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $DB = 5\text{ cm}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC) $\quad m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$

$DB = 5\text{ cm}$, $AB = 10\text{ cm}$, $\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

a المطلوب: إيجاد BE , DE

البرهان:

فرضًا $\quad \because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \therefore m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$

$\because m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ AEB مثلث ثلاثيني – ستيني

خاصيّة المثلث ثلاثيني – ستيني $\quad \therefore BE = \frac{1}{2}AB = 5\text{ cm}$

فرضًا $\quad \overline{DB} \perp (ABC)$, $\overline{BE} \subset (ABC)$

خاصيّة المستقيم العمودي على مستو $\quad \therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$

في المستوي DBE:

المثلث DBE قائم في $\widehat{B}$، متطابق الضلعين.

طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين $\quad \therefore DE = BE \times \sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2}\text{ cm}$

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (DAC) , (BAC)

البرهان:

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين DAC ، BAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ في المستوي DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين DAC ، BAC هي $\widehat{BED}$

$\because$ ΔDBE قائم في $\widehat{B}$ ومتطابق الضلعين.

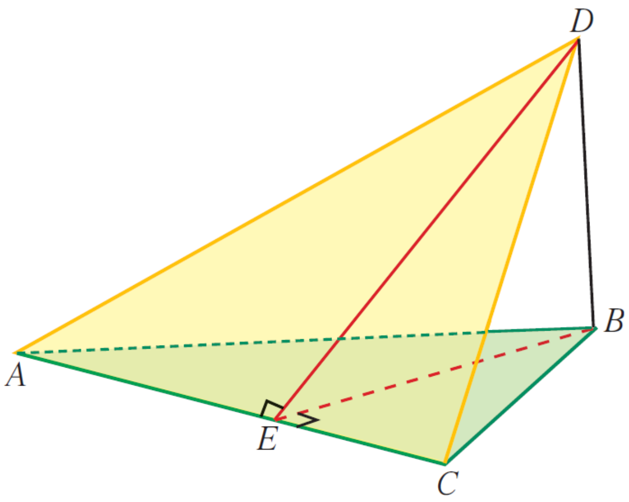
$\therefore m(\widehat{BED}) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(\widehat{BAC}) = 45^{\circ}$.



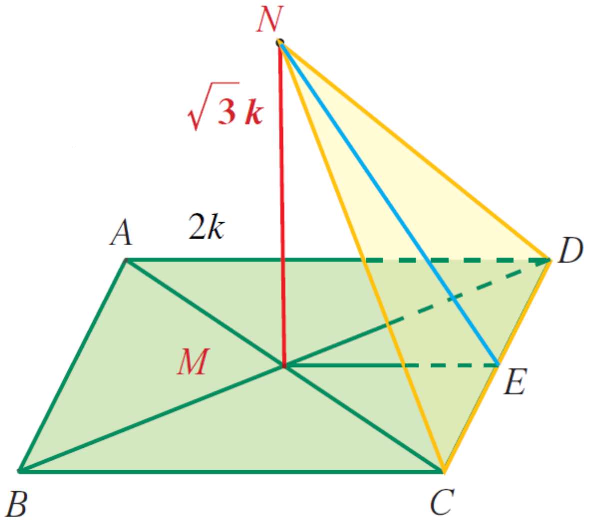
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (3)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$



الحل:

المعطيات: $ABCD$ مستطيل، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$AD = 2k$, $MN = \sqrt{3}\,k$, $\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NDC , $ABCD$

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان: $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين NCD , $ABCD$

$\because\ \overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore\ \overline{MN} \perp \overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$ (عملاً)

$\therefore\ \overline{ME} \perp \overline{CD}$ (2)

من $(1), (2)$ نجد أن:

$\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore\ \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore$ $M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD

M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ (عملاً)

$$\therefore\ ME = \frac{1}{2} AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2k = k$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M (من خواص المستقيم العمودي مع مستوي)

$$\tan(M\hat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}\,k}{k} = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ m(M\hat{E}N) = 60^\circ$$

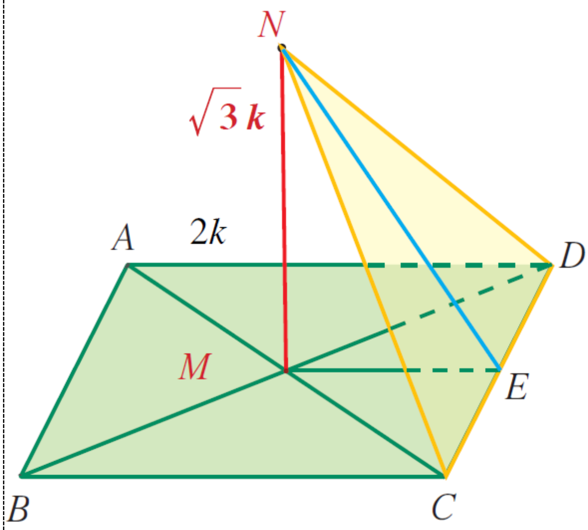
$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$ هو 60°

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

إذا كان $AB = 6\,k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NBC , $ABCD$



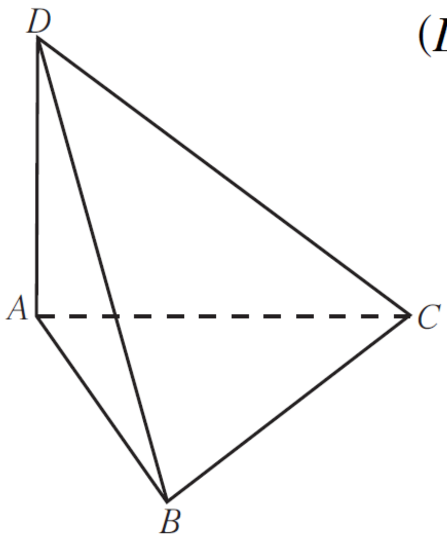
* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

(D



* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،

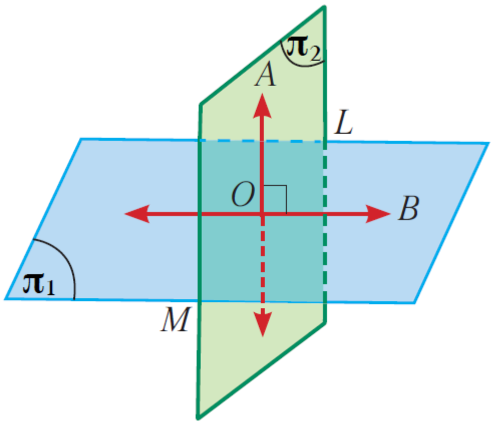
طول ضلعه $10\,\text{cm}$، إذا كان $m(M\widehat{A}B) = m(M\widehat{A}C) = 90^\circ$، $MA = 5\,\text{cm}$، D منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين $(MBC), (ABC)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°.



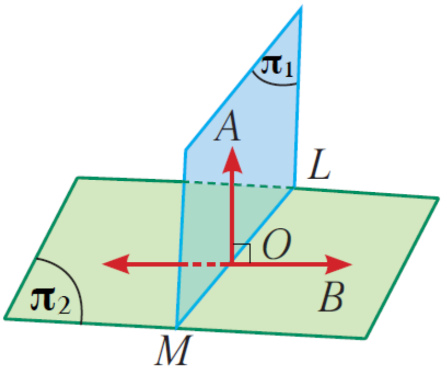
في المستوى π_1: $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوى π_2: $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OB}$ فإن المستويين متعامدان.

نظرية (10)

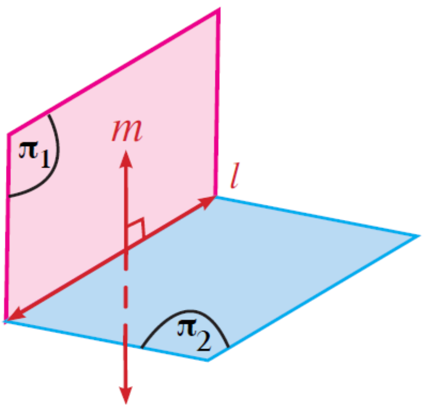
إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي.



$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \implies \pi_1 \perp \pi_2$$

نتيجة (3)

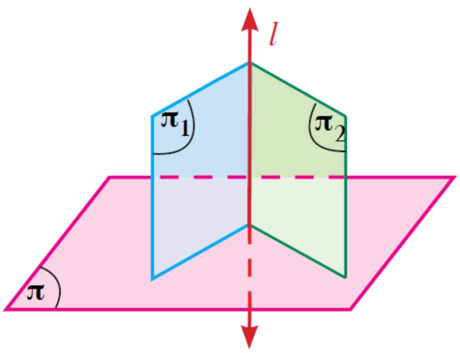
إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.



$$\pi_1 \perp \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \ , \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$

نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًّا على هذا المستوي الثالث.



$$\pi_1 \perp \pi \ , \ \pi_2 \perp \pi \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (1)

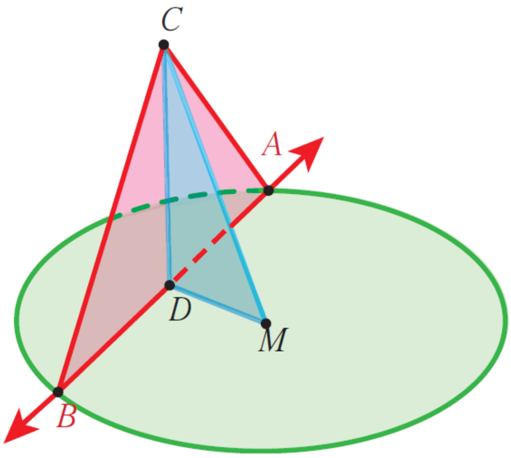
في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$. إذا كان $MC = \sqrt{50}\ \text{cm}$, $DM = DC = 5\ \text{cm}$

أثبت أن:

a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

b) مستوى الدائرة $\perp (ACB)$



الحل:

المعطيات:

$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$،

$DM = DC = 5\ \text{cm}$, $MC = \sqrt{50}\ \text{cm}$

a) المطلوب: إثبات أن: $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

البرهان:

في المثلث ABC متطابق الضلعين

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$ (1)

في مستوي الدائرة

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$، M مركز الدائرة

$\therefore \overline{MD} \perp \overline{AB}$ (2)

من (1), (2) نجد أن: $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{MC}$

b) المطلوب إثبات أن مستوى الدائرة $\perp (ACB)$

البرهان:

$\because \overline{CD} \perp \overline{AB}$ (1)

$(CM)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$

$(CD)^2 + (DM)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DM}$ (2)

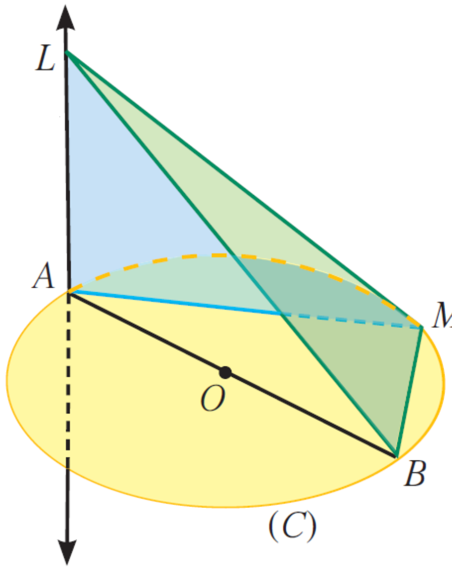
$\therefore \Delta$ CDM قائم الزاوية في D

من (1), (2) نجد أن: مستوي الدائرة $\perp \overleftrightarrow{CD}$

$\because \overline{CD} \subset (ACB)$

$\therefore$ مستوي الدائرة $\perp (ACB)$ (نظرية)

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

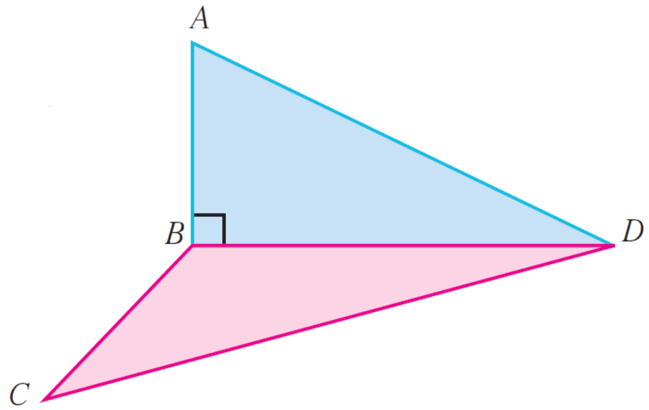
$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .



مثال (2)

A , B , C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

a $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

b $(ABD) \perp (CBD)$

المعطيات:

A , B , C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$, $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

المطلوب:

a إثبات أن: $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ (معطى)

$\overline{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \ \overline{AB} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ ABD مثلث قائم الزاوية في B ومنه:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$ (1)

ولكن (معطى) (2) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

من $(1), (2)$ نجد أن: $(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$

$\therefore$ BDC مثلث قائم الزاوية في C (عكس نظرية فيثاغورث)

$\therefore \ \overline{BC} \perp \overline{DC}$

b المطلوب: إثبات أن $(ABD) \perp (CBD)$

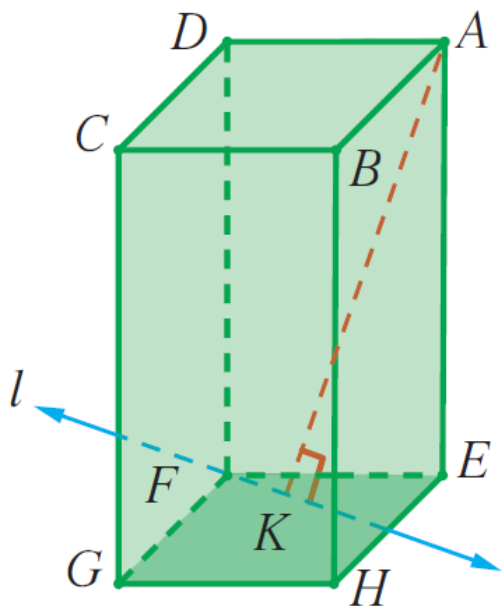
البرهان:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABD)$

$\therefore \ (ABD) \perp (CBD)$ (نظرية)

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .



حاول أن تحل

2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

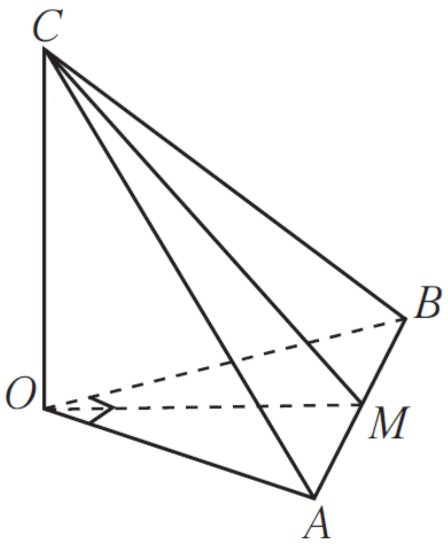
(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$

(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB



مبدأ العد

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثال (1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

Law of Permutations قانون التباديل

$$_{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r \in \mathbb{Z}^{+}, n \geq r$

حاول أن تحل

ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

حاول أن تحل

حل المعادلات التالية:

a) $_{n}P_{7} = 12 \times {}_{n}P_{5}$

b) $_{8}P_{r} = 4 \times {}_{8}P_{r-1}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

c $\dfrac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

d $\dfrac{{}_{n}P_{n-2}}{{}_{n}P_{n-4}} = \dfrac{n^2}{12}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

Law of Combinations قانون التوافيق

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+ ,\ n \geq r$

مثال (2)

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

مثال (3)

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.
يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

$${}_{n}C_{m} = {}_{n}C_{n-m}$$

$${}_{n}C_{m} = {}_{n-1}C_{m} + {}_{n-1}C_{m-1}$$

خواص أخرى للتوافيق

حاول أن تحل

أوجد قيمة n في كلٍّ مما يلي:

a) ${}_{n}C_{2} = 105$

b) ${}_{n}C_{4} = {}_{n}C_{5}$

c) $\dfrac{{}_{n}C_{7}}{{}_{(n-1)}C_{6}} = \dfrac{8}{7}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

$$T_{r+1} = {}_nC_r \bullet x^{n-r} \bullet y^r$$

مثال (1)

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(x+y)^5$

b $(x-3)^6$

c $(x^2+3y)^4$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (2)

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

حاول أن تحل

في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

حاول أن تحل

أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

أنواع الأحداث Types of Events

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S): فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S): فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

مثال (1)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1 اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:

a A: ظهور عدد أكبر من 5

b B: ظهور عدد فردي

c C: ظهور عدد زوجي

d D: ظهور عدد أصغر من 7

2 a أثبت أن B, C حدثان متتامان.

b بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

Probability الاحتمال

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a $0 \leq P(E) \leq 1$

b إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة $= 1$

مثال (2)

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.

ما احتمال اختيار «محمد»؟

حاول أن تحل

اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

مثال (3)

حوالى 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.
اختير طالب عشوائيًّا من هذه الجامعة.

a ما احتمال أن يكون عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34؟

b ما احتمال أن يكون عمر الطالب 25 عامًا فأكثر؟

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (4)

رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي.

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

مثال (5)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

مثال (6)

إذا كان الحدثان r, t متنافيان. أوجد $P(t \cup r)$.

(b) $P(t) = 12\%$, $P(r) = 27\%$

(a) $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$

إذا كان الحدثان n, m مستقلّان. أوجد $P(m \cap n)$.

(b) $P(m) = 0.6$; $P(n) = 0.9$

(a) $P(m) = \frac{1}{4}$; $P(n) = \frac{2}{3}$

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .

احتمال ذات الحدين

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E، H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

$$P(E) = \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

مثال (7)

A

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

B في إحدى المدن، وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم. اختير 10 أشخاص عشوائيًّا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

C يستخدم حوالى 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبًا. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

* التمارين السابقة لا تشمل جميع الأفكار يرجى مراجعة كتاب الطالب وكراسة التمارين .