دولـــة الكويت
وزارة التربية
امتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي 2016 / 2017 م
المجال الدراسي : الرياضيات الزمن : ساعتان و 45 دقيقة عدد الصفحات 13 صفحه

القسم الأول : أسئلـة المقال :
أجب عن الأسئلة التالية موضحا خطوات الحل في كل منها :

السؤال الأول :

14

(a) أوجد :

(6 درجات)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$$

الحل:

$$\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x} = \frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x\cos 4x}{5x} \qquad [2]$$

$$= \frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cos 4x \quad , \quad x \neq 0 \qquad [0.5]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}\right) = \frac{2}{5} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x\cos 4x}{5x}\right) = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\cos 4x = \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cos 4x\right) \qquad [0.5]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}\right) + \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}(\cos 4x) \qquad [0.5]$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \qquad [0.5]$$

(تراعى الحلول الصحيحة الأخرى في جميع الأسئلة المقالية)

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد :

(8 درجات)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}$$

الحل:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}=\frac{\sqrt{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(3-\frac{5}{x})}$$ [1]

$$=\frac{|x|\ \sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})}$$ ، عندما $x<0$ يكون $|x|=-x$ [0.5]

$$=\frac{-x\ \sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})}=-\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}\quad ,x\neq 0$$ [1]

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}3-\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=3-0+0=3\ ,3>0$$ [1.5]

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{3}$$ [1]

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}3-\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=3-0=3\quad ,\quad 3\neq 0$$ [1.5]

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{-\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})}=\frac{-\sqrt{3}}{3}=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$ [1.5]

14

السؤال الثاني

(a) إدرس إتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث :

(7 درجات)

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 5 & : x=3\end{cases}$$

الحل:

$f(x)=x^2-3 \quad : \ x\in(1,3)$

$\forall\ c\in(1,3),\quad f(c)=\ c^2-3$ [0.5]

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x^2-3)=\ c^2-3$ [0.5]

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)\quad \forall x\in(1,3)$ [0.5]

$\therefore$ f متصله على $(1,3)$ ....(1) [0.5]

ندرس إتصال الداله f عند $x=1$ من اليمين

$f(1)\ =\ -2$ [0.5]

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3)$ [0.5]

$=1-3=-2=f(1)$ [0.5]

[0.5] الداله f متصله عند $x=1$ من اليمين ....(2)

ندرس إتصال الداله f عند $x=3$ من اليسار

$f(3)\ =\ 5$ [0.5]

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\ \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3)$ [0.5]

$=9-3\ =6\neq f(3)$ [0.5]

[0.5] الداله f غير متصله عند $x=3$ من اليسار ....(3)

[1] من (1)، (2)، (3) f ليست متصله على $[1,3]$ ولكنها متصلة على $[1,3)$

تابع السؤال الثاني :

(b) إذا كانت : $y = x\sin x$

فأثبت أن : $y'' + y - 2\cos x = 0$ (7 درجات)

الحل:

$$y = x\sin x$$

$$y' = \sin x \cdot (x)' + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x\cos x$$ [3]

$$y'' = \cos x + \cos x \cdot (x)' + x \cdot (\cos x)'$$ [1.5]

$$= \cos x + \cos x + x \cdot (-\sin x) = 2\cos x - x\sin x$$ [1]

$$y'' + y - 2\cos x = 2\cos x - x\sin x + x\sin x - 2\cos x$$ [1]

$$= 0$$ [0.5]

وتوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وقيمتها $f(1) = 6$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$$f''(x) = 4 - 12x^2 \qquad [0.5]$$

نضع $f''(x) = 0$

$$4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 5 = 5\frac{5}{9} \qquad [0.5]$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 5 = 5\frac{5}{9} \qquad [0.5]$$

$-\infty \qquad \frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$
إشارة f''	+ + +	− − −	+ + +
بيان الدالة f	مقعر لأعلى	مقعر لأسفل	مقعر لأعلى

[1.5]

من الجدول نجد أنّ :

بيان الدالة f مقعر للأعلى على الفترتين $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ ، $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

بيان الدالة f مقعر للأسفل على الفترة $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

النقطة $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 5\frac{5}{9})$ نقطة انعطاف

النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 5\frac{5}{9})$ نقطة انعطاف

الجمهورية اليمنية ديوان عام الوزارة 2016-2017

تابع السؤال الثالث :

(b) إدرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^2 - x^4 + 5$
وارسم بيانها

(9 درجات)

الحل :

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^4) = -\infty \ , \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^4) = -\infty \quad \boxed{0.5}$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x - 4x^3 \qquad \boxed{1.5}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow 4x(1 - x)(1 + x) = 0$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 + 5 = 5$$

$\therefore$ (0,5) نقطة حرجة [0.5]

$$x = 1 \Rightarrow f(2) = 2(1)^2 - (1)^4 + 5 = 6$$

$\therefore$ (1,6) نقطة حرجة [0.5]

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 + 5 = 6$$

$\therefore$ (−1,6) نقطة حرجة [0.5]

نكون الجدول لدراسة إشارة f' :[2]

-∞	-1	0	1	∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	+ + +	− − −	+ + +	− − −
سلوك الدالة f	↗↗	↘↘	↗↗	↘↘

من الجدول :

f متزايدة على كلا من الفترتين $(0,1)$, $(-\infty,-1)$, f متناقصة على كلا من الفترتين $(1,\infty)$, $(-1,0)$

نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنه توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ وقيمتها $f(0) = 5$

وتوجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وقيمتها $f(-1) = 6$

السؤال الرابع

14

(a) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+2}$ عند $x = 0$

(8 درجات)

الحل:

$$f(0) = \frac{0-4}{0+2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad [0.5]$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)\cdot(3x-4)' - (x+2)'.(3x-4)}{(x+2)^2}$$

1 1

$$= \frac{(x+2)\cdot(3) - (3x-4)\cdot(1)}{(x+2)^2} \qquad [3]$$

1

$$= \frac{10}{(x+2)^2} \qquad [1]$$

ميل المماس :

$$m = f'(a) = f'(0) = \frac{10}{(0+2)^2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \qquad [1.5]$$

فتكون معادلة المماس هي

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a) \qquad [1]$$

$$y - (-2) = \frac{5}{2}\,(x-0) \qquad [0.5]$$

1 +

$$2y + 4 = 5x \qquad [0.5]$$

$$2y - 5x + 4 = 0$$

تابع السؤال الرابع :

(b) يعتقد مدير شركة أن متوسط رواتب المستخدمين لديه 290 دينار ، فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 مستخدمين و تبين أن متوسطها الحسابي $\overline{x} = 283$ دينار وإنحرافها المعياري $S = 32$ دينار . فهل يمكن الإعتماد على هذه العينة لتأكيد ما إفترضه باستخدام مستوى ثقة 95 % (علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي) (6 درجات)

الحل:

$S = 32$ ، $n = 10$ ، $\bar{x} = 283$

① صياغة الفروض الإحصائية

$H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$ [0.5]

② نوجد المقياس الإحصائي

$\because$ σ غير معلوم ، $n \leq 30$ [0.5]

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.6917 \quad [1.5]$$

③ $\because \quad n = 10$

$\therefore$ درجات الحرية :

$n - 1 = 10 - 1 = 9$ [0.5]

مستوى الثقة 95 %

$\therefore \quad 1 - \alpha = 0.95$

$\therefore \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ [0.5]

من جدول توزيع t نجد :

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.262$ [0.5]

④ منطقة القبول : $(-t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}}) = (-2.262 , 2.262)$ [1]

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي :

$\because -0.6917 \in (-2.262 , 2.262)$ [0.5]

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$ [0.5]

جدول الإجابة

(1)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(2)	**(a)**	(b)	(c)	(d)

الدرجة : .... × 1 = ...

(3)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(4)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(5)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(6)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(7)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(8)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(9)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(10)	(a)	(b)	**(c)**	(d)

الدرجة : .... × 1.5 = ...

14

الدرجة : ....